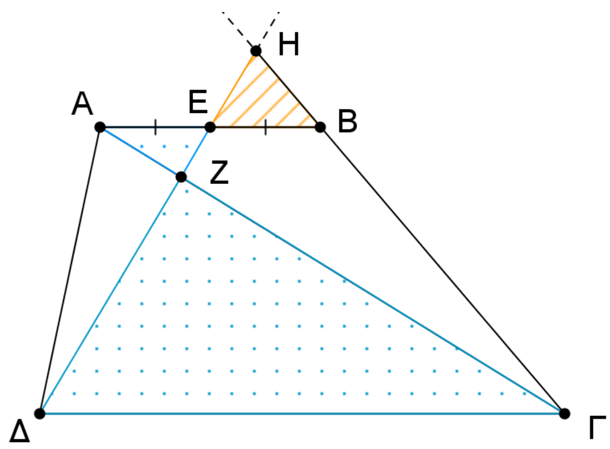



**Ε8.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το μέσο της μικρής βάσης ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Η, να αποδείξετε ότι τα Ζ, Η είναι συζυγή αρμονικά των Δ, Ε.

Λύση:

Σύμφωνα με τον ορισμό των αρμονικών συζυγών σημείων *(σ.155)* αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{Z\Delta}{ZE}=\frac{H\Delta}{HE}$ .

● Επειδή ΕΒ//ΔΓ από Σ.Ε.Θ. (*Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{H\Delta}{HE}=\frac{\Delta\Gamma}{EB} \quad \textbf{(1)}$$

● Επειδή ΑΕ//ΔΓ από Σ.Ε.Θ. (*Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)*

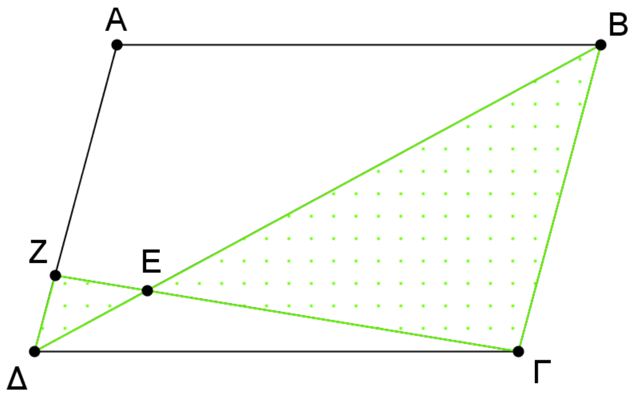
$$\frac{Z\Delta}{ZE}=\frac{\Delta\Gamma}{AE} \quad \textbf{(2)}$$

● Επειδή το Ε είναι το μέσο του ΑΒ, ισχύει ΑΕ=ΕΒ, οπότε τα δεύτερα μέλη των **(1)** και **(2)** είναι ίσα, συνεπώς και τα πρώτα θα είναι ίσα:

$$\frac{Z\Delta}{ZE}=\frac{H\Delta}{HE}$$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr

**A4.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της ΔΒ τέτοιο, ώστε $\text{ΔΕ} = \frac{1}{5}\text{ΔΒ}$. Αν η ΓΕ τέμνει την ΑΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΖ = 3ΔΖ.




Λύση:

1η Λύση σχολικού

Επειδή ΖΔ //ΒΓ από Σ.Ε.Θ. (*Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΒΓ}} \text{ ή επειδή ΒΓ=ΑΔ } \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΑΔ}} \Leftrightarrow \text{(ιδιότητα αναλογιών) } \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΔΕ}+\text{ΕΒ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΔΖ}+\text{ΑΔ}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΔΖ}+(\text{ΔΖ}+\text{ΑΖ})} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{\text{ΔΖ}}{2\text{ΔΖ}+\text{ΑΖ}} \Leftrightarrow 2\text{ΔΖ}+\text{ΑΖ} = 5\text{ΔΖ} \Leftrightarrow \text{ΑΖ} = 3\text{ΔΖ}$$

2η λύση (παραλλαγή)

Επειδή ΖΔ //ΒΓ από Σ.Ε.Θ. (*Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΒ}}$$

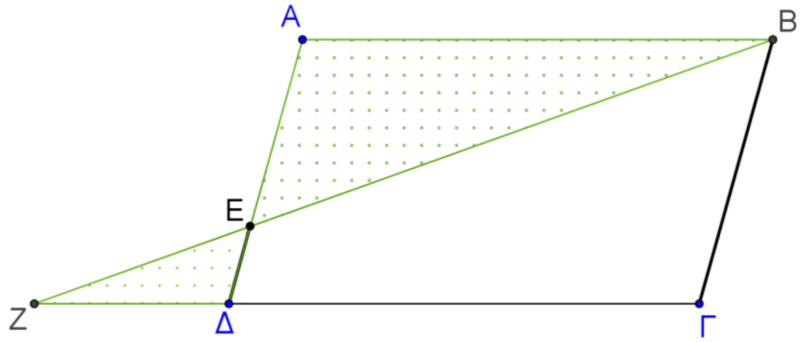
$$\text{ΔΕ} = \frac{1}{5}\text{ΔΒ} \Leftrightarrow 5\text{ΔΕ} = \text{ΔΒ} \Leftrightarrow 5\text{ΔΕ} = \text{ΔΒ} \Leftrightarrow 5\text{ΔΕ} = \text{ΔΕ}+\text{ΕΒ} \Leftrightarrow 4\text{ΔΕ} = \text{ΕΒ} \Leftrightarrow \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΒ}} = \frac{1}{4} \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$\frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{1}{4} \overset{\text{ΒΓ=ΔΑ}}{\Leftrightarrow} \frac{\text{ΔΖ}}{\text{ΑΔ}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\text{ΔΖ} = \text{ΑΔ} \Leftrightarrow 4\text{ΔΖ} = \text{ΔΖ}+\text{ΖΑ} \Leftrightarrow 3\text{ΔΖ} = \text{ΑΖ} \Leftrightarrow \text{ΑΖ} = 3\text{ΔΖ}.$$

**Α5.** Από την κορυφή Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, που τέμνει την πλευρά ΑΔ στο Ε και την προέκταση της ΓΔ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\Delta A}{\Delta E} - \frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = 1$$




Λύση:

*Σκεπτικό:* Θα προσπαθήσω να κάνω τα κλάσματα στο $1^{ο}$ μέλος ομώνυμα και συγκεκριμένα θα προσπαθήσω να βρώ ένα κλάσμα ίσο με το $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z}$ που να έχει παρονομαστή ΔΕ.

- Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο έχουμε ΔΓ=ΑΓ οπότε:

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = \frac{AB}{\Delta Z} \quad \mathbf{(1)}$$

- Επειδή ΑΒ//ΔΖ από Σ.Ε.Θ. *(Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

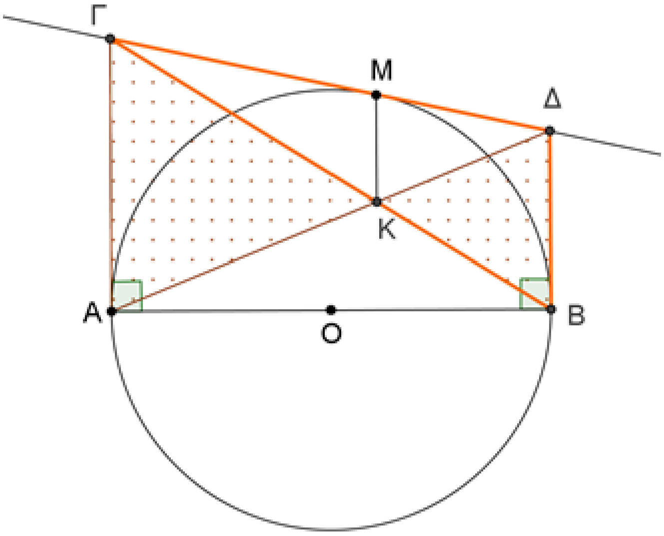
$$\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{EA}{\Delta E} \quad \mathbf{(2)}$$

Αρα από **(1)** και **(2)** : $\frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = \frac{EA}{\Delta E}$

Ετσι:

$$\frac{\Delta A}{\Delta E} - \frac{\Delta \Gamma}{\Delta Z} = \frac{\Delta A}{\Delta E} - \frac{EA}{\Delta E} = \frac{\Delta A - EA}{\Delta E} = \frac{\Delta E}{\Delta E} = 1$$

**Σ5.** Η εφαπτόμενη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιάς διαμέτρου του ΑΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.
Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι $MK \perp AB$.




Λύση:

Σκεπτικό: Γνωρίζουμε *(Πόρισμα σ.78)* ότι *«Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα είναι κάθετη και στην άλλη.»*

Δίνεται ότι $\Delta B \perp AB$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι ΜΚ//ΔΒ.

► Αφού οι ΓΑ και ΔΒ είναι κάθετες στην ΑΒ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες, ΓΑ//ΔΒ *(Πόρισμα ΙΙ σ.76)* οπότε από Σ.Ε.Θ *(Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{\Gamma K}{KB} = \frac{\Gamma A}{\Delta B} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά ΓΑ=ΓΜ και ΔΒ=ΔΜ **(2)** (ως εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο. *(Θεώρημα ΙΙ σ.62)*)

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\frac{\Gamma K}{KB} = \frac{\Gamma M}{M\Delta}$, οπότε από αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή στο τρίγωνα ΓΔΒ έχουμε ΜΚ//ΔΒ.

$$\left.\begin{matrix} \Delta B \perp AB \\ MK // \Delta B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \textit{(Πόρισμα σ.78)}\ MK \perp AB .$$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr