4. Συμπληρωματικές αποδείξεις

Θεώρημα Ι (του Θαλή)

Αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο ευθείες, τότε ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

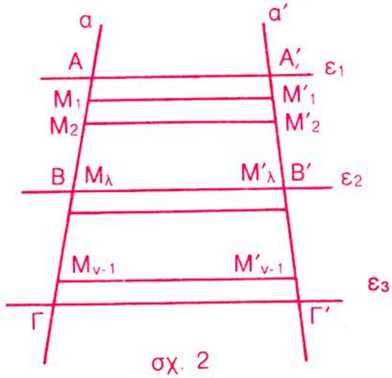
Δηλαδή αν π.χ. οι παράλληλες ε_1, ε_2, ε_3 τέμνουν τις ευθείες α, α΄ στα σημεία Α, Β, Γ και Α΄, Β΄, Γ΄ αντιστοίχως (σχ. 1) τότε ισχύει

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'}$$

Απόδειξη. Έστω ν φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν. Παίρνουμε* τα σημεία $Μ_1, Μ_2 \dots Μ_{ν-1}$ του τμήματος ΑΓ, ώστε να είναι

$$ΑΜ_1 = Μ_1Μ_2 = \dots = Μ_{ν-1}Γ = \frac{1}{ν} ΑΓ.$$

Από τα σημεία αυτά φέρνουμε τις παράλληλες προς την ε_1, οι οποίες διαιρούν το τμήμα Α΄Γ΄ σε ν ίσα τμήματα (Θεώρημα ΙΙΙ, § 3.2). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

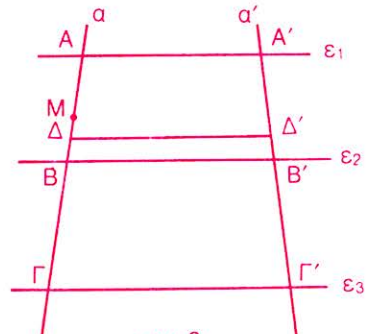


σχ. 2

i) Έστω ότι για κάποιο φυσικό ν το Β συμπίπτει με ένα από τα σημεία $Μ_1, Μ_2 \dots Μ_{ν-1}$, π.χ. με το $Μ_λ$ (σχ. 1).

Τότε $ΑΒ = \frac{λ}{ν} ΑΓ$. Αφού Β΄ είναι το αντίστοιχο σημείο του Β στην ευθεία α΄, θα ισχύει $Α'Β' = \frac{λ}{ν} Α'Γ'$. Διαιρώντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές έχουμε $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$ (1)

ii) Έστω ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν, το σημείο Β δεν συμπίπτει με κάποιο από τα σημεία $Μ_1, Μ_2, \dots Μ_{ν-1}$ (σχ. 2).



σχ. 3

Ας υποθέσουμε τότε ότι η (1) δεν ισχύει, αλλά ότι ισχύει π.χ. η

$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} > \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$ (2), απ' όπου προκύπτει

$ΑΒ > \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} \cdot Α'Β'$ (3)

Τό άτοπο είναι ότι θα βρούμε

Στην ημιευθεία ΑΓ θεωρούμε τμήμα $ΑΜ = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} \cdot Α'Β'$ (4). $\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} \cdot Α'Β' > ΑΜ$

Από τις σχέσεις (3), (4) έχουμε ΑΒ > ΑΜ.

Για κατάλληλη τιμή του ν μπορούμε να έχουμε $\frac{ΑΓ}{ν} < ΜΒ$, αρκεί να επιλέξουμε $ν > \frac{ΑΓ}{ΜΒ}$.

* Με τις εκφράσεις «παίρνουμε» ή «φέρνουμε» δεν εννοούμε κατ' ανάγκη γεωμετρική κατασκευή των στοιχείων αυτών αλλά αναφερόμαστε απλώς στην ύπαρξή τους.

Τότε όμως ένα τουλάχιστο από τα σημεία διαίρεσης, ας το ονομάσουμε Δ, θα βρίσκεται μεταξύ των σημείων Μ, Β. Έστω Δ΄, το σημείο της ευθείας α΄ που είναι αντίστοιχο του σημείου Δ. Όπως δείξαμε στην περίπτωση (i) θα ισχύει

$\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$ (5).

Αλλά $ΑΔ > ΑΜ$ και $Α'Δ' < Α'Β'$ οπότε $\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} > \frac{ΑΜ}{Α'Β'}$ (6), διότι το πρώτο κλάσμα έχει μεγαλύτερο αριθμητή και μικρότερο παρονομαστή από το δεύτερο. Από τις (5), (6) έχουμε

$\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} > \frac{ΑΜ}{Α'Β'}$ ή $\frac{ΑΓ}{Α'Γ'} \cdot Α'Β' > ΑΜ$ το οποίο είναι άτοπο λόγω της (4).

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο και όταν υποθέσουμε ότι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} < \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$

Ώστε $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε ακόμη $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{Α'Γ' - Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'}$.