

1. Συμπληρωματικές αποδείξεις

Θεώρημα I:

Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της πλευράς του.

Δηλαδή, το εμβαδό E ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς a ($a \in \mathbb{R}^+$) είναι:

$$E = a^2$$

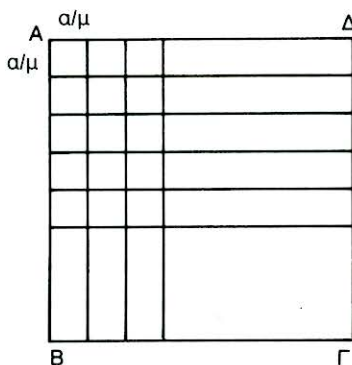
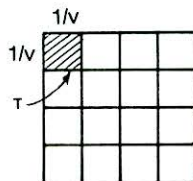
* **Απόδειξη.** Έστω ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος πλευράς a . Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, καθόσον ο αριθμός a είναι ή ρητός ή άρρητος.

Περίπτ. (i): Έστω ότι ο θετικός αριθμός a είναι ρητός (σχ.1).

Τότε $a = \frac{\mu}{\nu}$ όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$.

Θεωρούμε ένα τετράγωνο T με πλευρά 1 και διαιρούμε καθεμιά από τις πλευρές του σε ν ίσα τμήματα. Συνδέοντας τα αντίστοιχα σημεία διαίρεσης των απέναντι πλευρών, το τετράγωνο T χωρίζεται σε ν^2 ίσα τετράγωνα, που το καθένα έχει πλευρά $1/\nu$. Αν τ είναι ένα από αυτά, τότε κατά το αξίωμα του εμβαδού $(T) = \nu^2(\tau)$ και επειδή $(T) = 1$, βρίσκουμε $1 = \nu^2(\tau)$ ή $(\tau) = 1/\nu^2$ (1). Διαιρούμε τώρα καθεμιά από τις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ σε μ ίσα τμήματα και συνδέουμε τα αντίστοιχα σημεία διαίρεσης των απέναντι πλευρών. Τότε καθένα από τα μ^2 τετράγωνα, στα οποία χωρίζεται το $AB\Gamma\Delta$, έχει πλευρά $\frac{1}{\mu}a = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{\nu}$, δηλαδή είναι ίσο προς το τ . Έτσι, έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = \mu^2(\tau)$

και, λόγω της (1), $(AB\Gamma\Delta) = \mu^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2$, οπότε τελικά $(AB\Gamma\Delta) = a^2$.



Σχ.1

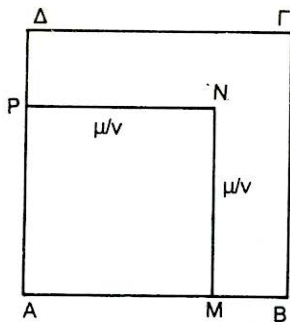
Περίπτ. (ii). Έστω ότι ο a είναι άρρητος (σχ.2).

Θεωρούμε ένα τετράγωνο $AMNP$ με πλευ-

ρά $\frac{\mu}{\nu} < a$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε τα M, P

να είναι σημεία των πλευρών AB και AD
αντιστοίχως. Τότε το $AMNP$ περιέχεται
στο $AB\Gamma\Delta$ και επομένως $(AMNP) < E$, όπου

$E = (AB\Gamma\Delta)$. Αλλά $(AMNP) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2$ (περίπτ.



Σχ. 2

(i)), οπότε $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 < E$ ή $\frac{\mu}{\nu} < \sqrt{E}$

Αποδείχτηκε έτσι ότι για κάθε ρητό $\frac{\mu}{\nu}$ ισχύει: Αν $\frac{\mu}{\nu} < a$, τότε είναι

και $\frac{\mu}{\nu} < \sqrt{E}$ (1) Ομοίως Αν $\frac{\mu}{\nu} > a$, τότε είναι και $\frac{\mu}{\nu} > \sqrt{E}$ (2)

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ρητός μεταξύ των \sqrt{E}
και a και άρα $\sqrt{E} = a^*$, απ' όπου έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = a^2$.