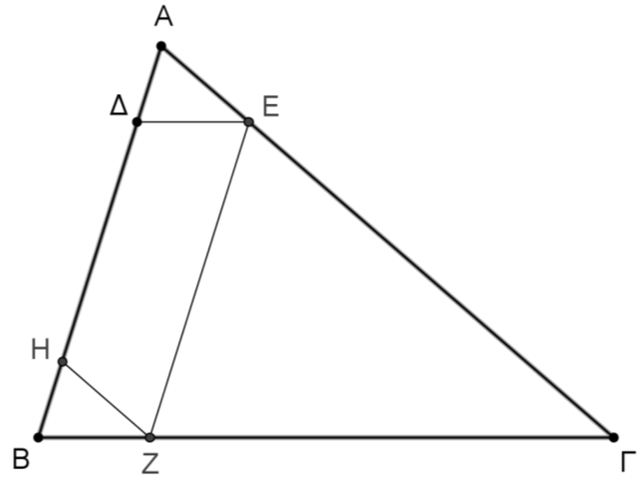
1^o Σέτ ασκήσεων στο Θεώρημα Θαλή (Ασκήσεις Ε1, Ε2, Ε3, Ε4, Ε7 και Α7 σχολικού σ.156-157)

Ε1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Ζ και τέλος από το Ζ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει την ΑΒ στο Η.



Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{Α\Delta}{\Delta Β}=\frac{ΒΗ}{ΗΑ}$

ii) ΑΔ=ΒΗ

Σημείωση: Στο i) Άλλαξα σε σχέση με το σχολικό την σειρά των γραμμάτων αντί ΔΑ σε ΑΔ και αντί ΗΒ σε ΒΗ για να έχουμε ΑΔ+ΔΒ=ΑΒ και όχι ΔΑ+ΔΒ=ΑΒ στο ii)

Λύση:

i) • Επειδή ΔΕ//ΒΓ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{Α\Delta}{\Delta Β}=\frac{ΑΕ}{Ε\Gamma} \quad (1)$$

• Επειδή ΕΖ//ΑΒ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΕ}{Ε\Gamma}=\frac{ΒΖ}{Ζ\Gamma} \quad (2)$$

• Επειδή ΖΗ//ΑΓ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

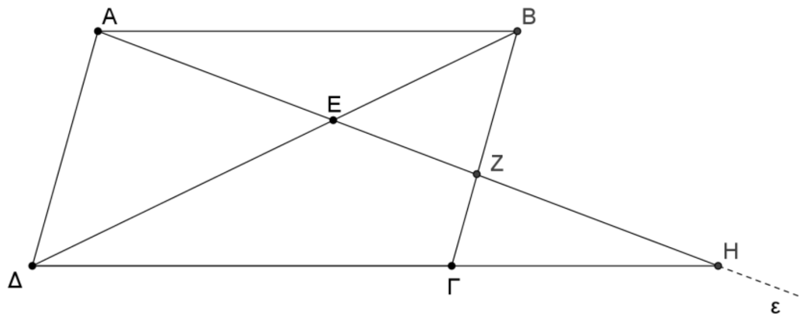
$$\frac{ΒΖ}{Ζ\Gamma}=\frac{ΒΗ}{ΗΑ} \quad (3)$$

• Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\frac{Α\Delta}{\Delta Β}=\frac{ΒΗ}{ΗΑ}$

ii) Εφαρμόζοντας γνωστή ιδιότητα των αναλογιών (7.4 σ.147 σχολικού) έχουμε:

$$\frac{Α\Delta}{\Delta Β}=\frac{ΒΗ}{ΗΑ} \Leftrightarrow \frac{Α\Delta}{Α\Delta+\Delta Β}=\frac{ΒΗ}{ΒΗ+ΗΑ} \Leftrightarrow \frac{Α\Delta}{ΑΒ}=\frac{ΒΗ}{ΒΑ} \Leftrightarrow Α\Delta=ΒΗ$$

E2. Από την κορυφή **Α** παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η.



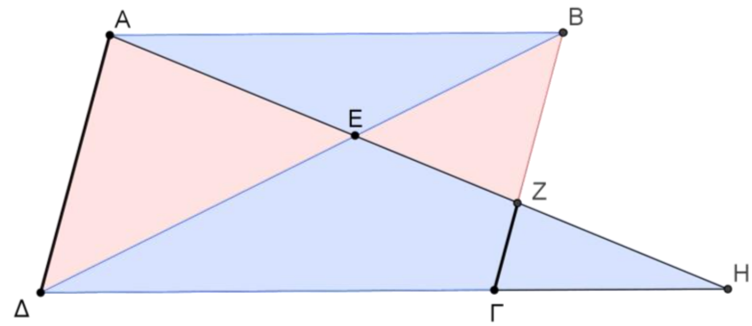
Να αποδείξετε ότι :

i) $\frac{AZ}{AH} = \frac{AB}{\Delta H}$

ii) $AE^2 = EZ \cdot EH$

Λύση:

i) Επειδή στο τρίγωνο ΗΑΔ είναι ΓΖ//ΑΔ, από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.153)* έχουμε:



$$\frac{AZ}{AH} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta H}$$

Ομως ΔΓ=ΑΒ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου οπότε:

$$\frac{AZ}{AH} = \frac{AB}{\Delta H}$$

ii) ● Στο τρίγωνο ΑΕΔ, η ΒΖ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του κι επειδή ΒΖ//ΑΔ, από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού+ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ σ.153)* έχουμε:

$$\frac{AE}{EZ} = \frac{\Delta E}{EB} \quad \textbf{(1)}$$

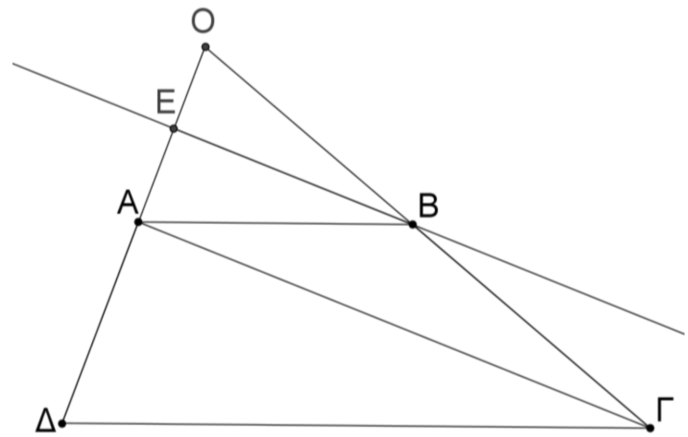
● Στο τρίγωνο ΕΔΗ, η ΑΒτέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του κι επειδή ΑΒ//ΔΗ, από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού+ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ σ.153)* έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{EB} = \frac{EH}{AE} \quad \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** έχουμε**:**

$$\frac{AE}{EZ} = \frac{EH}{AE} \Leftrightarrow AE^2 = EZ \cdot EH$$

Ε3. Οι μή παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο.



Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε.

Να αποδείξετε ότι το ΟΑ είναι μέσο ανάλογο των ΟΔ και ΟΕ *(σ.147 σχολικό)* δηλαδή ότι:

$$OA^2 = O\Delta \cdot OE$$

Λύση:

- Επειδή ΑΒ//ΔΓ (ορισμός τραπεζίου) από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{OA}{O\Delta} = \frac{OB}{O\Gamma} \quad (1)$$

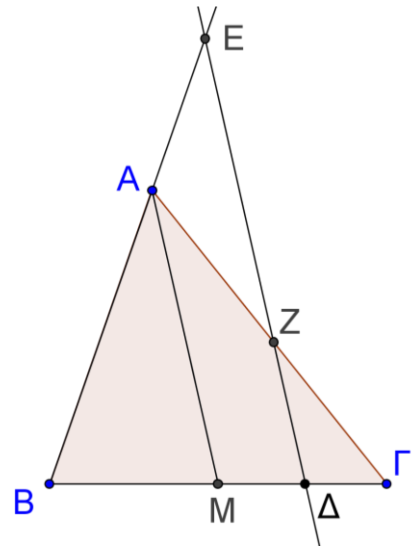
- Επειδή ΕΒ//ΑΓ (ορισμός τραπεζίου) από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{OE}{OA} = \frac{OB}{O\Gamma} \quad (2)$$

- Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{OA}{O\Delta} = \frac{OE}{OA} \Leftrightarrow OA^2 = O\Delta \cdot OE$$

E4. Από σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη προς τη διάμεσό του ΑΜ, που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα



Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

Λύση:

- Στο τρίγωνο ΒΕΔ επειδή ΔΕ//ΑΜ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΜΔ}{ΜΒ} \quad \textbf{(1)}$$

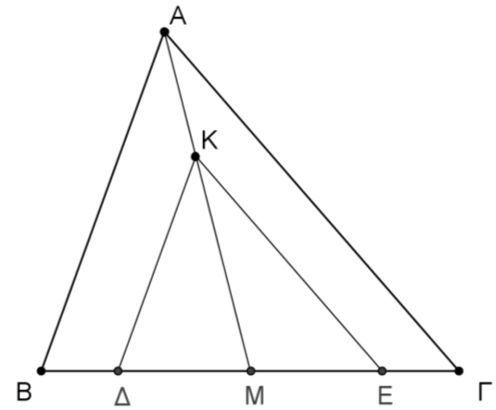
- Στο τρίγωνο ΓΑΜ επειδή ΔΖ//ΑΜ από Πόρισμα του θεωρήματος Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

$$\frac{ΑΖ}{ΑΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΓ} \quad (2)$$

- Επειδή ΑΜ διάμεσος το Μ είναι το μέσο του ΒΓ οπότε ισχύει ΜΒ=ΜΓ, οπότε τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΒ} = \frac{ΑΖ}{ΑΓ} \Leftrightarrow \textit{(εναλλάσουμε σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα τους μέσους όρους της αναλογίας)} \ \frac{ΑΕ}{ΑΖ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

Ε7. Από <u>τυχαίο</u> σημείο Κ της διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ, που τέμνουν τη ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ.



Λύση:

● Στο τρίγωνο ΑΒΜ επειδή ΚΔ//ΑΒ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

$$\frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΜΒ}}=\frac{\text{ΜΚ}}{\text{ΜΑ}} \quad \textbf{(1)}$$

● Στο τρίγωνο ΑΓΜ επειδή ΚΕ//ΑΓ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

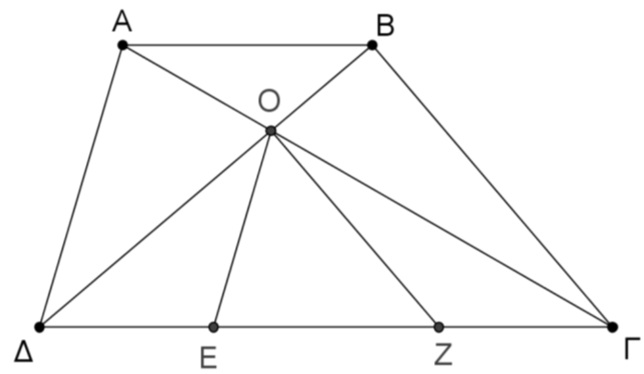
$$\frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΜΓ}}=\frac{\text{ΜΚ}}{\text{ΜΑ}} \quad \textbf{(2)}$$

● Τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα οπότε:

$$\frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΜΒ}}=\frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΜΓ}}$$

● Επειδή ΑΜ διάμεσος το Μ είναι το μέσο του ΒΓ, οπότε ισχύει ΜΒ=ΜΓ κι έτσι η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί : $\frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΜΒ}}=\frac{\text{ΜΕ}}{\text{ΜΒ}} \Leftrightarrow \text{ΜΔ}=\text{ΜΕ}$

Α7. Τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ο.
Από το Ο φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΔ, ΒΓ που τέμνουν την ΔΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι ΔΕ=ΓΖ.



Λύση:

● Στο τρίγωνο ΑΔΓ επειδή ΟΕ//ΑΔ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{\Delta \Gamma}=\frac{AO}{A\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$

● Στο τρίγωνο ΒΓΔ επειδή ΟΖ//ΒΓ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

$$\frac{\Gamma Z}{\Delta \Gamma}=\frac{BO}{B\Delta} \quad \textbf{(2)}$$

● Στο τρίγωνο ΟΔΓ η ΑΒ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του κι επειδή ΑΒ//ΔΓ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού+ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ σ.153)* έχουμε:

$$\frac{AO}{A\Gamma}=\frac{BO}{B\Delta} \quad \textbf{(3)}$$

● Από (1), (2), και (3) προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta E}{\Delta \Gamma}=\frac{\Gamma Z}{\Delta \Gamma} \Leftrightarrow \Delta E=\Gamma Z\,.$$