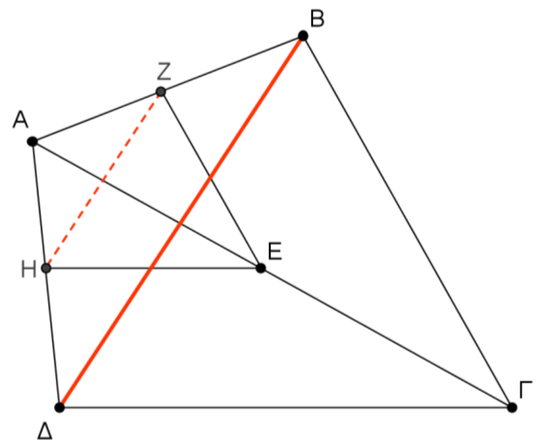
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΘΑΛΗ

Ε5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ.Οι παράλληλες από το Ε προς τις ΒΓ, ΓΔ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΔ στα Ζ και Η αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΔΒ



Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AH}{H\Delta}$ (αντίστροφο του Θαλή στο τρίγωνο ΑΒΔ)

● Στο τρίγωνο ΑΒΓ επειδή ΖΕ//ΒΓ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

$\frac{AE}{AB}=\frac{M\Delta}{MB}$ (1)

● Στο τρίγωνο ΑΔΓ επειδή ΗΕ//ΒΓ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

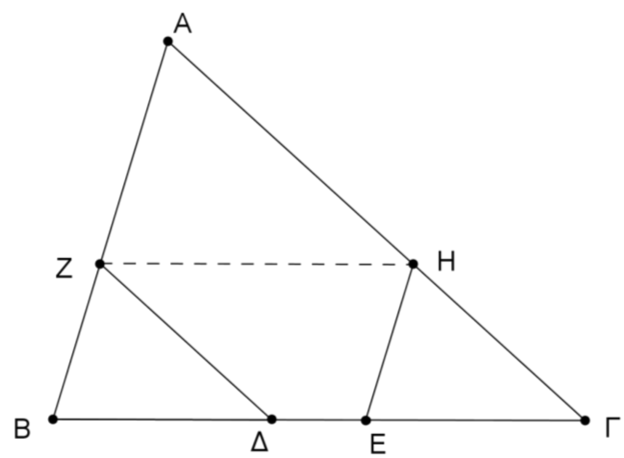
$\frac{AH}{H\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AH}{H\Delta}$

Ε6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε της πλευράς ΒΓ ώστε ΒΔ=ΓΕ< $\frac{B\Gamma}{2}$ *(ίσως όχι* απαραίτητο).

Οι παράλληλες από τα Δ και Ε προς τις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα τέμνουν την ΑΒ στο Ζ και την ΑΓ στο Η.

Να αποδείξετε ότι ΖΗ // ΒΓ.



Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AH}{H\Gamma}$ (αντίστροφο του Θαλή στο τρίγωνο ΑΒΓ)

● Στο τρίγωνο ΒΑΓ επειδή ΖΔ//ΑΓ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

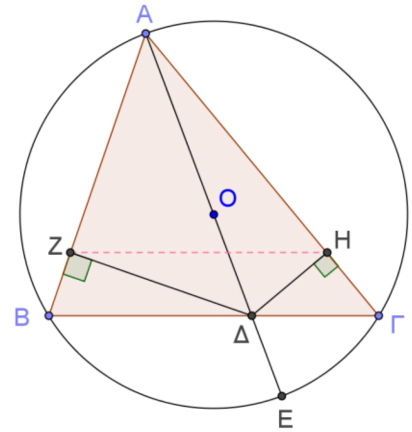
$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$ (1)

● Στο τρίγωνο ΓΑΒ επειδή ΗΕ//ΑΒ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

$\frac{AH}{H\Delta}=\frac{AE}{E\Gamma}$ **(2)**.

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι: $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AH}{H\Delta}$

A3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω Δ η τομή της διαμέτρου ΑΕ με τη ΒΓ. Αν Ζ και Η είναι οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΖΗ//ΒΓ.*



Λύση:

Σκέψη: Αρκεί να δείξουμε $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AH}{H\Gamma}$ (αντίστροφο του Θαλή στο ΑΒΓ).

► Φέρνουμε ΒΕ και ΕΓ.Είναι $A\hat{B}E=90^\circ$ και $A\hat{\Gamma}E=90^\circ$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο.

Επομένως ΖΔ//ΒΕ ως κάθετες στην ίδια ευθεία (την ΑΒ) και ΔΗ//ΕΓ ως κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΓ.

Αρα στο τρίγωνο ΑΒΕ από Πόρισμα στο Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

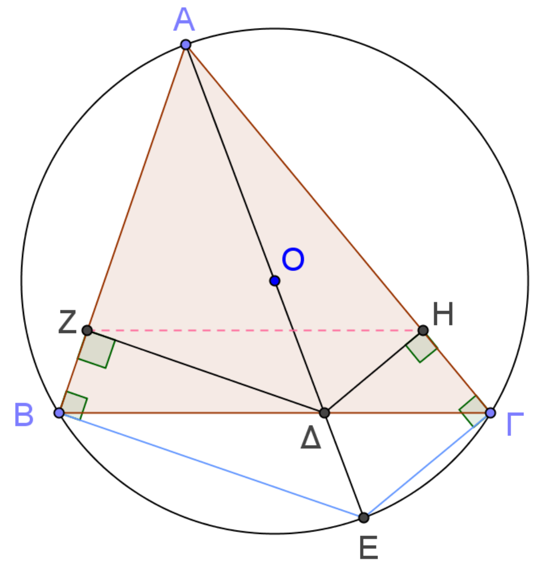
$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{A\Delta}{\Delta E} \quad (1)$$

Αρα στο τρίγωνο ΑΓΕ από Πόρισμα στο Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AH}{H\Gamma}=\frac{A\Delta}{\Delta E} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

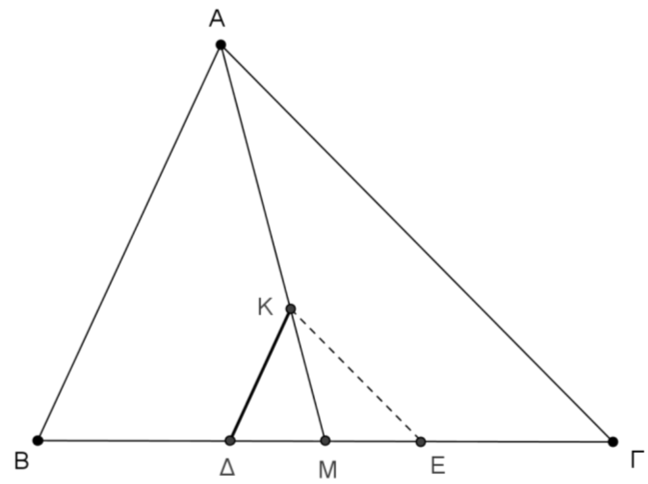
$\frac{AZ}{ZB}=\frac{AH}{H\Gamma}$ οπότε από αντίστροφο του θεωρήματος Θαλή στο ΑΒΓ *(Πόρισμα σ.152-το αντίστροφο)* έχουμε ΖΗ//ΒΓ.



Σημείωση: *Πολύ μεγαλύτερο ενδιαφέρον έχει η άσκηση αν την δούμε ως άσκηση γεωμετρικής κατασκευής.*
Να βρεθεί σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ώστε αν φέρουμε κάθετες ΔΖ και ΔΗ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, να ισχύει ΖΗ//ΒΓ.

Κατασκευή:*Φέρουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ και την διάμετρο ΑΕ.Το σημείο τομής της διαμέτρου με την πλευρά ΒΓ είναι το ζητούμενο.*

A6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την διάμεσο ΑΜ στο Κ.Να αποδείξετε ότι:



i) Το Κ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ii) ΚΕ // ΑΓ.

Λύση:

i) Γνωρίζουμε ότι το βαρύκεντρο (κέντρο βάρους) έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου ή για να χρησιμοποιήσουμε και ορολογία του κεφαλαίου 7, που χωρίζει την ΑΜ σε λόγο 2.

Αρα αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{ΑΚ}{ΚΜ}=2$.

Είναι ΔΜ=ΒΜ-ΒΔ=ΜΓ-ΕΓ=ΜΕ.Αρα το Μ είναι μέσο του ΔΕ, οπότε ΒΜ=ΔΕ=2ΔΜ (*)

● Στο τρίγωνο ΜΒΑ επειδή ΔΚ//ΑΒ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152 σχολικού)* έχουμε:

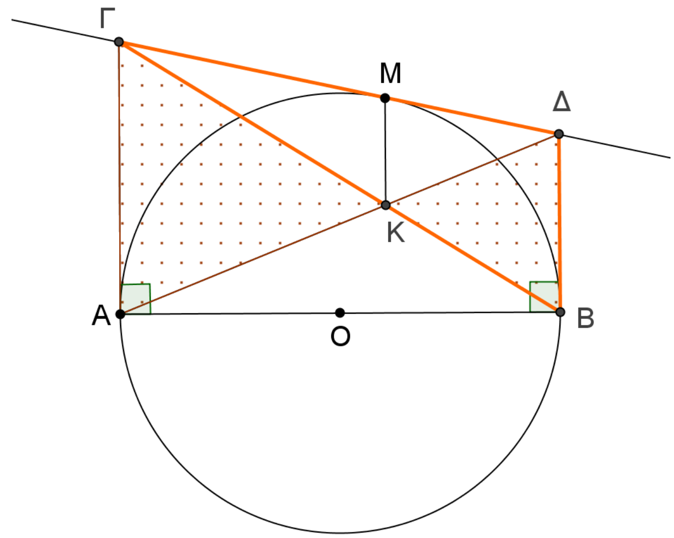
$\frac{ΑΚ}{ΚΜ}=\frac{ΒΔ}{ΔΜ}\overset{(*)}{=}\frac{2ΔΜ}{ΔΜ}=2$ **(1)**. Αρα Κ βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ii) ΕΓ=ΔΕ=2ΜΕ οπότε $\frac{ΓΕ}{ΕΜ}=2$ **(2).**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει $\frac{ΑΚ}{ΚΜ}=\frac{ΓΕ}{ΕΜ}$ οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή στο τρίγωνο ΜΑΓ προκύπτει ότι ΚΕ // ΑΓ.

Σ5. Η εφαπτόμενη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιάς διαμέτρου του ΑΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι ΜΚ ⊥ ΑΒ.



Λύση:

Σκεπτικό: Γνωρίζουμε *(Πόρισμα σ.78)* ότι *«Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα είναι κάθετη και στην άλλη.»*

Δίνεται ότι ΔΒ ⊥ ΑΒ, άρα αρκεί να δείξουμε ότι ΜΚ//ΔΒ.

► Αφού οι ΓΑ και ΔΒ είναι κάθετες στην ΑΒ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες, ΓΑ//ΔΒ *(Πόρισμα ΙΙ σ.76)* οπότε από Σ.Ε.Θ *(Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{\Gamma K}{KB}=\frac{\Gamma A}{\Delta B} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά ΓΑ=ΓΜ και ΔΒ=ΔΜ **(2)** (ως εφαπτόμενα τμήματο από σημείο προς κύκλο.*(Θεώρημα ΙΙ σ.62)*)

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\frac{\Gamma K}{KB}=\frac{\Gamma M}{M\Delta}$ οπότε από αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλής στο τρίγωνα ΓΔΒ έχουμε ΜΚ//ΔΒ.

$$\left.\begin{matrix} \Delta B \perp AB \\ MK // \Delta B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \textit{(Πόρισμα σ.78)}\ MK \perp AB .$$

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr