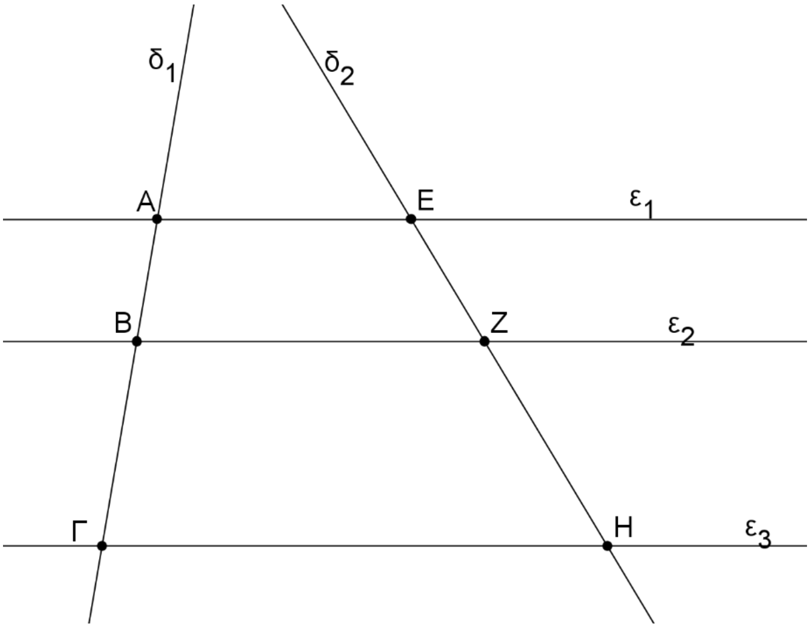
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ 7ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

►Διατυπώστε το θεώρημα του Θαλή, κάνετε σχήμα και γράψτε την αναλογία που εκφράζει το θεώρημα του Θαλή στο συγκεκριμένο σχήμα.

Απάντηση:

«Αν τρείς τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.»



Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή:

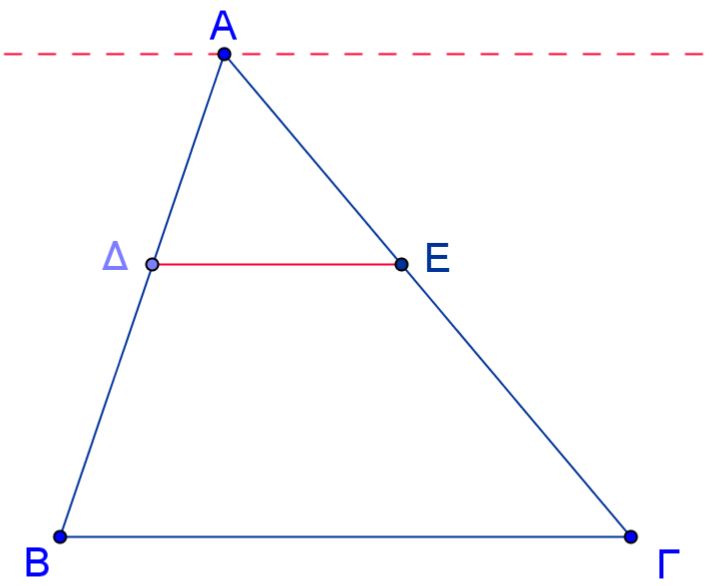
Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ τότε:

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$$

Αθανασίου Δημήτρης *asepfreedom@yahoo.gr*

►Συνήθως στις ασκήσεις το θεώρημα του Θαλή θα το εφαρμόζουμε στα παρακάτω ΔΥΟ ΒΑΣΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ :

1ο



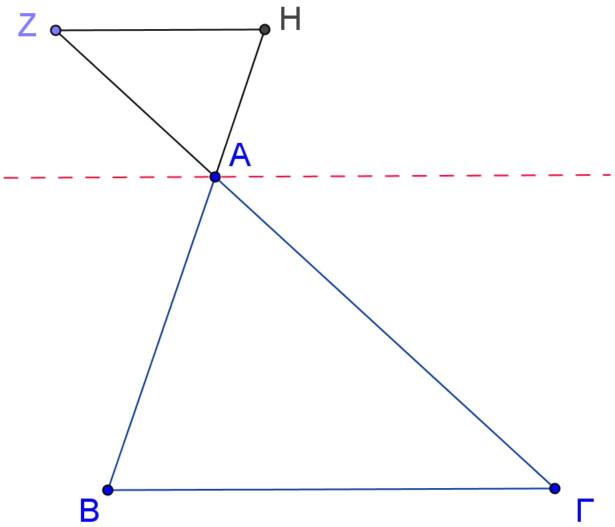
► **Αν ΔΕ//ΒΓ τότε:**

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ}\ ,\quad \frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}\ ,\quad \frac{ΔΒ}{ΑΒ}=\frac{ΕΓ}{ΑΓ}$$

Για το ποιά από τις αναλογίες αυτές θα πάρουμε θα μας καθοδηγεί το ζητούμενο της εκάστοτε άσκησης.

► **Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ισχύει κάποια από τις παραπάνω αναλογίες** *(ή κάποια ισοδύναμή της εφαρμόζοντας ιδιότητες των αναλογιών)*, **τότε ΔΕ//ΒΓ.**

2ο *(σχήμα παπιγιόν ή πεταλούδας)*



►**Αν ΖΗ//ΒΓ τότε:**

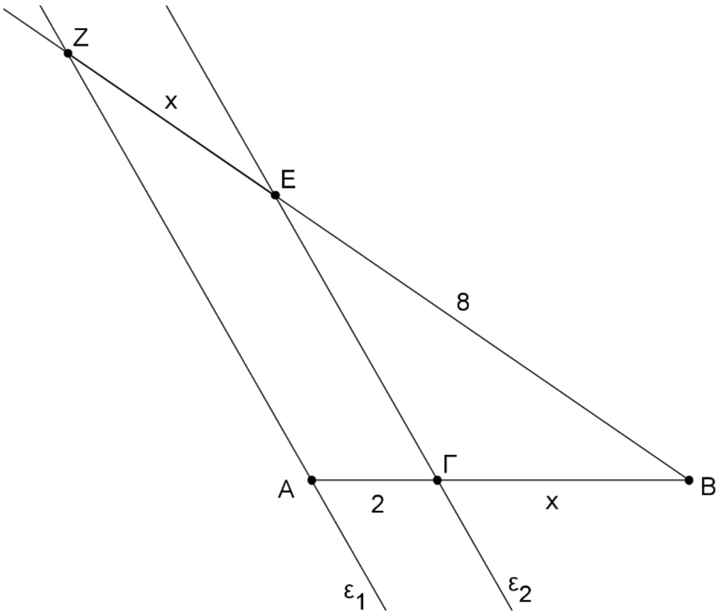
$$\frac{HA}{AB}=\frac{ZA}{A\Gamma}, \quad \frac{HA}{HB}=\frac{ZA}{Z\Gamma}, \quad \frac{AB}{HB}=\frac{A\Gamma}{Z\Gamma}$$

Για το ποιά από τις αναλογίες αυτές θα πάρουμε, θα μας καθοδηγεί το ζητούμενο της εκάστοτε άσκησης.

► **Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ισχύει κάποια από τις παραπάνω αναλογίες (***ή κάποια ισοδύναμή της εφαρμόζοντας ιδιότητες των αναλογιών)***, τότε ΖΗ//ΒΓ.**

►Στα διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.Να υπολογιστεί το x.

(να φαίνεται πως δουλέψετε όχι ένα σχέτο νούμερο).



Απάντηση:

Αφού $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, από το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

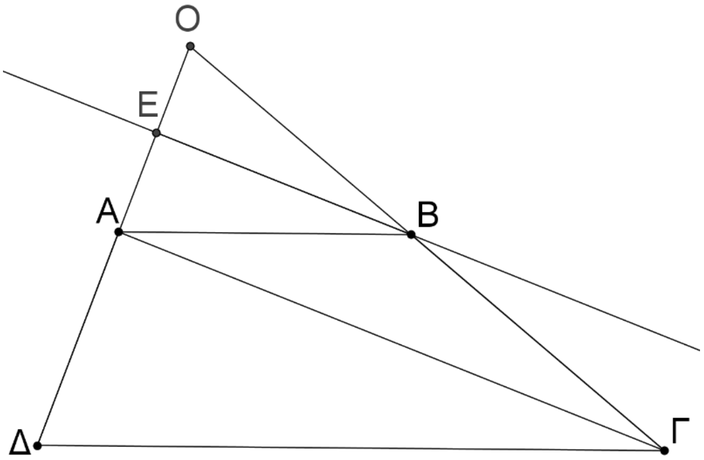
$$\frac{BE}{B\Gamma}=\frac{EZ}{\Gamma A} \Leftrightarrow \frac{8}{x}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=4$$

Αθανασίου Δημήτρης *asepfreedom@yahoo.gr*

Ε3. Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΔ, ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στο Ο.

Φέρνουμε την διαγώνιο ΑΓ του τραπεζίου και από το Β παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ΑΔ στο Ε.

Να αποδείξετε ότι: $ΟΑ^2 = ΟΔ \cdot ΟΕ$.



Λύση:

- Επειδή ΑΒ//ΓΔ, από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΟΑ}{ΟΔ} = \frac{ΟΒ}{ΟΓ} \quad (1)$$

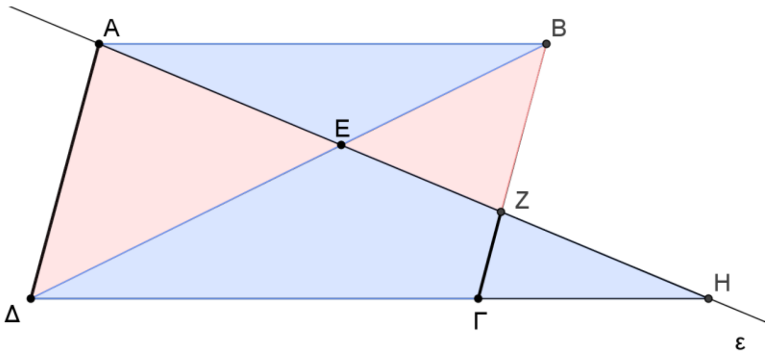
- Επειδή ΒΕ//ΑΓ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΟΕ}{ΟΑ} = \frac{ΟΒ}{ΟΓ} \quad (2)$$

Επειδή τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα ίσα, οπότε:

$$\frac{ΟΑ}{ΟΔ} = \frac{ΟΕ}{ΟΑ} \overset{χιαστί}{\Leftrightarrow} ΟΑ^2 = ΟΔ \cdot ΟΕ$$

Ε2. Από την κορυφή **Α** παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, η οποία τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκταση της ΔΓ στο Η.Να αποδείξετε ότι :



i) $\dfrac{AZ}{AH}=\dfrac{AB}{\Delta H}$

ii) $AE^2=EZ\cdot EH$

Λύση:

i) Επειδή ΖΓ//ΑΔ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{AZ}{AH}=\frac{\Delta\Gamma}{\Delta H}$$

Ομως ΔΓ=ΑΒ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου οπότε τελικά $\dfrac{AZ}{AH}=\dfrac{AB}{\Delta H}$.

ii) Επειδή ΑΔ//ΒΖ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{AE}{EZ}=\frac{\Delta E}{EB} \quad (1)$$

Επειδή ΑΒ//ΔΗ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{EH}{AE}=\frac{\Delta E}{EB} \quad (2)$$

Επειδή τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) είναι ίσα, θα είναι και τα πρώτα, επομένως

$$\frac{AE}{EZ}=\frac{EH}{AE}\Leftrightarrow AE^2=EZ\cdot EH.$$

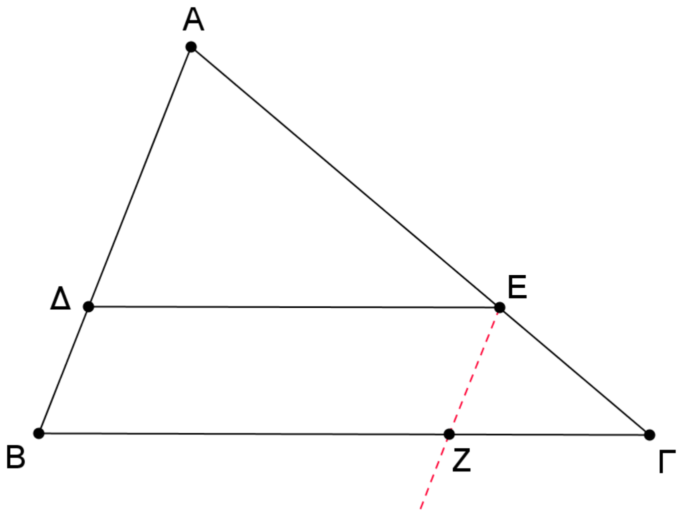
ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΘΑΛΗ (Σ.Ε.Φ)

Θεώρημα (σ.153)

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, αν ΔΕ//ΒΓ τότε:

$$\frac{Α\Delta}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{Α\Gamma} = \frac{\Delta Ε}{Β\Gamma}$$



Απόδειξη (εκτός ύλης)

► Επειδή ΔΕ//ΒΓ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{Α\Delta}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{Α\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$

► Από το Ε φέρνουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Ζ.

Επειδή ΕΖ//ΑΒ από θεώρημα Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΕ}{Α\Gamma} = \frac{ΒΖ}{Β\Gamma} \quad \textbf{(2)}$$

► Ομως το τετράπλευρο ΔΕΖΒ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες οπότε σύμφωνα με τον ορισμό του παραλληλογράμμου είναι παραλληλόγραμμο, άρα θα έχει τις απέναντι πλευρες του ίσες και ειδικά ΒΖ=ΔΕ

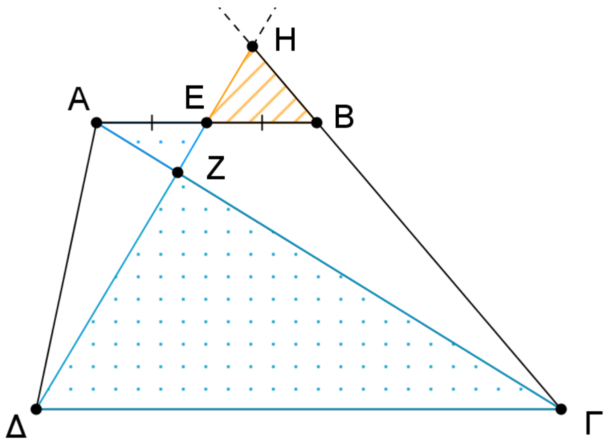
Επομένως η **(2)** γράφεται $\frac{ΑΕ}{Α\Gamma} = \frac{\Delta Ε}{Β\Gamma}$ **(3)**

► Πλέον, συνδιάζοντας τις **(1)** και **(3)** προκύπτει η ζητούμενη δηλαδή $\frac{Α\Delta}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{Α\Gamma} = \frac{\Delta Ε}{Β\Gamma}$.

Αθανασίου Δημήτρης *asepfreedom@yahoo.gr*

E8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το μέσο της μικρής βάσης ΑΒ.

Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΓΒ στο Η, να αποδείξετε ότι: $\frac{Η\Delta}{ΗΕ} = \frac{Ζ\Delta}{ΖΕ}$



Λύση:

● Επειδή ΕΒ//ΔΓ από Σ.Ε.Θ. (*Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$\frac{Η\Delta}{ΗΕ} = \frac{\Delta\Gamma}{ΕΒ}$ **(1)**

● Επειδή ΑΕ//ΔΓ από Σ.Ε.Θ. (*Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)*

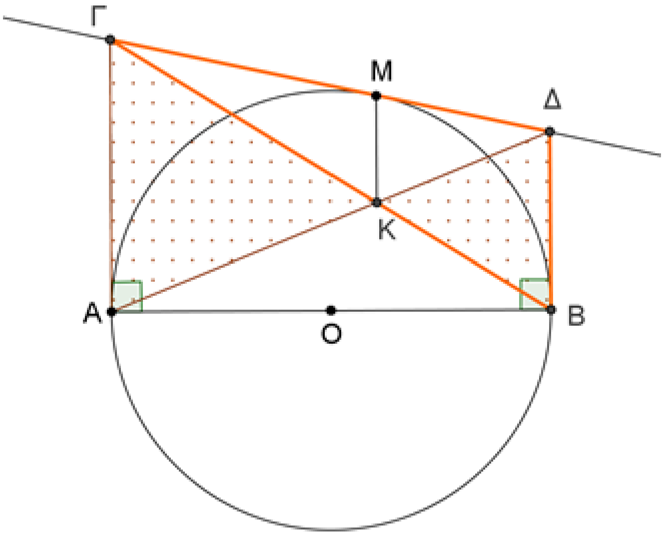
$\frac{Ζ\Delta}{ΖΕ} = \frac{\Delta\Gamma}{ΑΕ}$ **(2)**

● Επειδή το Ε είναι το μέσο του ΑΒ, ισχύει ΑΕ=ΕΒ, οπότε τα δεύτερα μέλη των **(1)** και **(2)** είναι ίσα, συνεπώς και τα πρώτα θα είναι ίσα:

$\frac{Η\Delta}{ΗΕ} = \frac{Ζ\Delta}{ΖΕ}$

Σ5. Η εφαπτόμενη ενός κύκλου σε σημείο του Μ τέμνει τις εφαπτόμενες στα άκρα Α, Β μιάς διαμέτρου του ΑΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι $ΜΚ \perp ΑΒ$.



Λύση:

Σκεπτικό: Γνωρίζουμε *(Πόρισμα σ.78)* ότι *«Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα είναι κάθετη και στην άλλη.»*

Δίνεται ότι $ΔΒ \perp ΑΒ$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι ΜΚ//ΔΒ.

► Αφού οι ΓΑ και ΔΒ είναι κάθετες στην ΑΒ θα είναι μεταξύ τους παράλληλες (ΓΑ//ΔΒ) *(Πόρισμα ΙΙ σ.76)*.Άρα από Σ.Ε.Θ *(Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{ΓΚ}{ΚΒ} = \frac{ΓΑ}{ΔΒ} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά ΓΑ=ΓΜ και ΔΒ=ΔΜ **(2)** (ως εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο.*(Θεώρημα ΙΙ σ.62)*)

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\frac{ΓΚ}{ΚΒ} = \frac{ΓΜ}{ΜΔ}$, οπότε από αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή στο τρίγωνο ΓΔΒ έχουμε ΜΚ//ΔΒ.

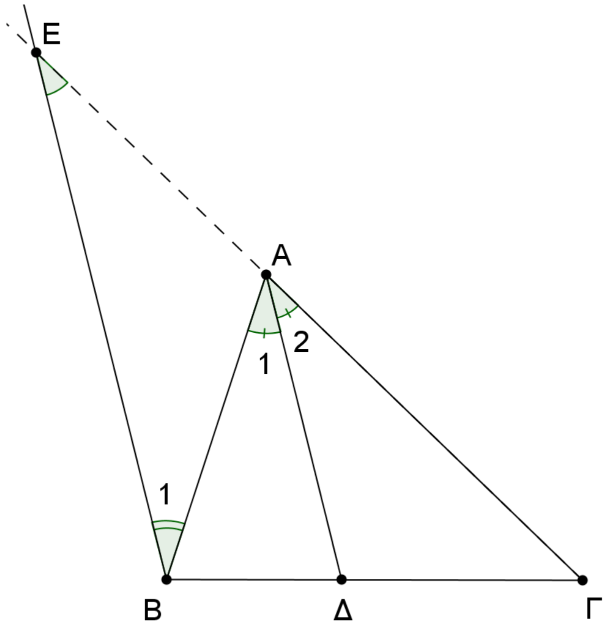
$$\left.\begin{matrix} ΔΒ \perp ΑΒ \\ ΜΚ // ΔΒ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \textit{(Πόρισμα σ.78)}\ ΜΚ \perp ΑΒ.$$

Σχόλιο: *Γιατί είναι η Σ5 μια ωραία άσκηση;*

Κυρίως, διότι χρησιμοποιεί δύο βασικά θεωρήματα του κεφαλαίου 7 συγκεκριμένα την σημαντική εφαρμογή Θαλή και το αντίστροφο του Θαλή.

Επιπλέον είναι εύκολο να το θυμόμαστε απέξω με την έννοια ότι το σχήμα δεν είναι πολύπλοκο, και το ζητούμενο δεν είναι κάποια αναλογία ή σχέση τμημάτων που είναι δύσκολο να απομνημονευτεί, αλλά απλά παραλληλία.

Θεώρημα (εσωτερικής διχοτόμου γωνίας)



Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών

Δηλαδή αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (Εκτός ύλης)

Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Ε.

Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$

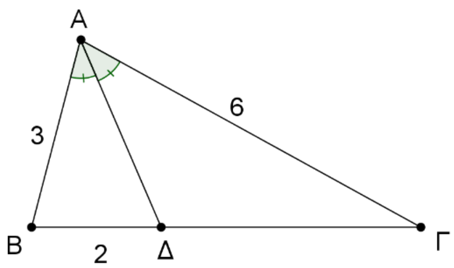
Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι ΑΕ=ΑΒ.Πράγματι:

- $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ)
- $\hat{A}_2 = \hat{E}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος)

οπότε $\hat{B}_1 = \hat{E}$ άρα ΑΕ=ΑΒ **(2)**. *(3.11 Πόρισμα (ii))*

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

►Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι διχοτόμος.Να υπολογίσετε το τμήμα ΔΓ.



Απάντηση:

Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου *(σ.158 σχολικό)* έχουμε:

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{2}{\Delta\Gamma} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 4$$

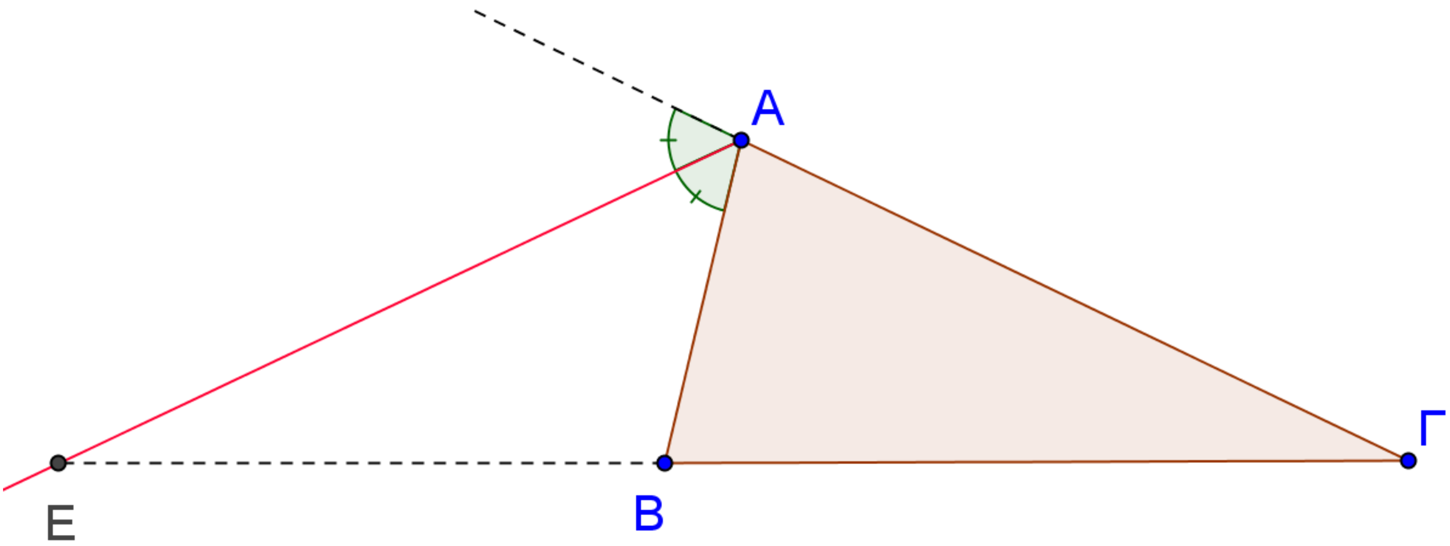
Ισχύει και το ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

Δηλαδή αν το Δ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$, τότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥ

Αν ΑΕ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ τότε ισχύει:

$$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

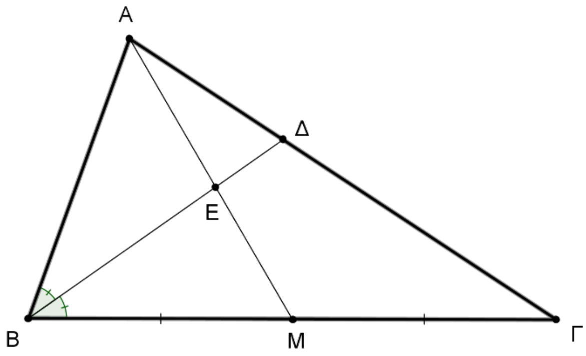


Ισχύει και το ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

Δηλαδή αν το Ε είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς ΒΓ και ισχύει:

$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ τότε ΑΕ εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

E1. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι $\frac{AE}{EM} = 2\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$



Λύση:

►Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΔ είναι εσωτερική διχοτόμος, άρα από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} \quad (1)$$

►Στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΒΕ είναι εσωτερική διχοτόμος, άρα από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AB}{BM} \quad (2)$$

Προσπαθώντας να συνδέσω τα δεύτερα μέλη των (1) και (2), παρατηρώ πως έχουν ίδιους αριθμητές και επιπλέον από τα δεδομένα αφού Μ μέσο της ΒΓ θα ισχύει $BM = \frac{B\Gamma}{2}$

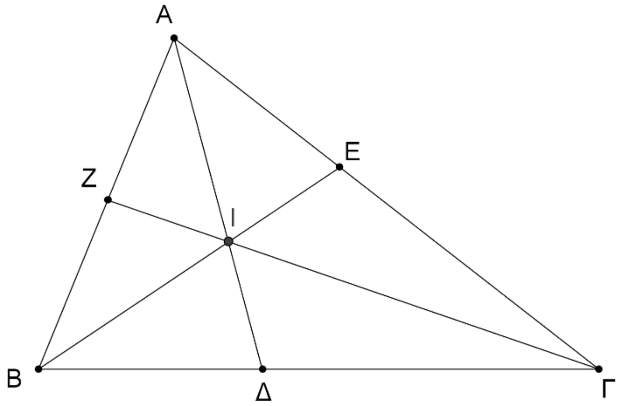
Επομένως η (2) γράφεται

$$\frac{AE}{EM} = \frac{AB}{BM} = \frac{AB}{\frac{B\Gamma}{2}} = 2\frac{AB}{B\Gamma} \overset{(1)}{=} 2\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}.$$

Αρα δείξαμε ότι $\frac{AE}{EM} = 2\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr

E5. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:



$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \bullet \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \bullet \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1 .$$

Λύση

Εφαρμόζοντας 3 φορές το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου για καθεμιά από τις διχοτόμους έχουμε:

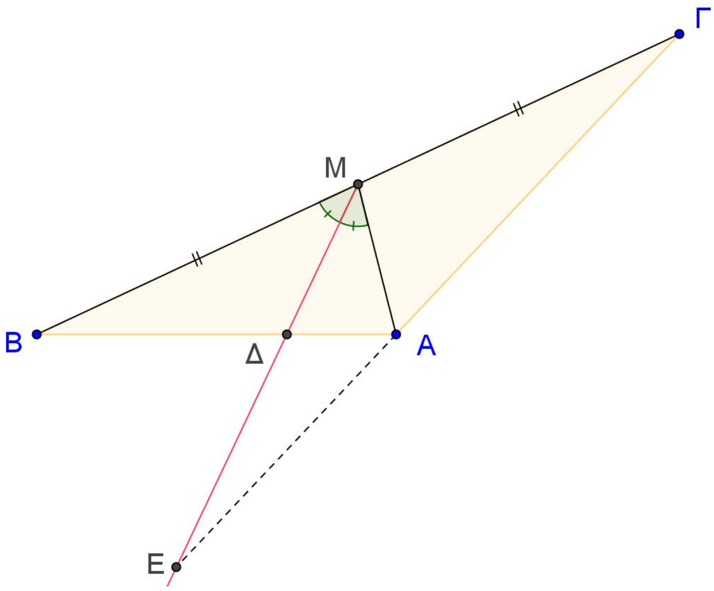
$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

$$\frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} \quad \text{και}$$

$$\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

Αρα : $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \bullet \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \bullet \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \bullet \frac{ΒΓ}{ΑΒ} \bullet \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = 1$

Ε3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90°$ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΕΑ • ΔΒ = ΕΓ • ΑΔ.



Λύση:

Στο τρίγωνο ΑΜΒ η ΜΔ είναι εσωτερική διχοτόμος οπότε από θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΜΓ, η ΜΕ είναι εξωτερική διχοτόμος οπότε από το θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου έχουμε:

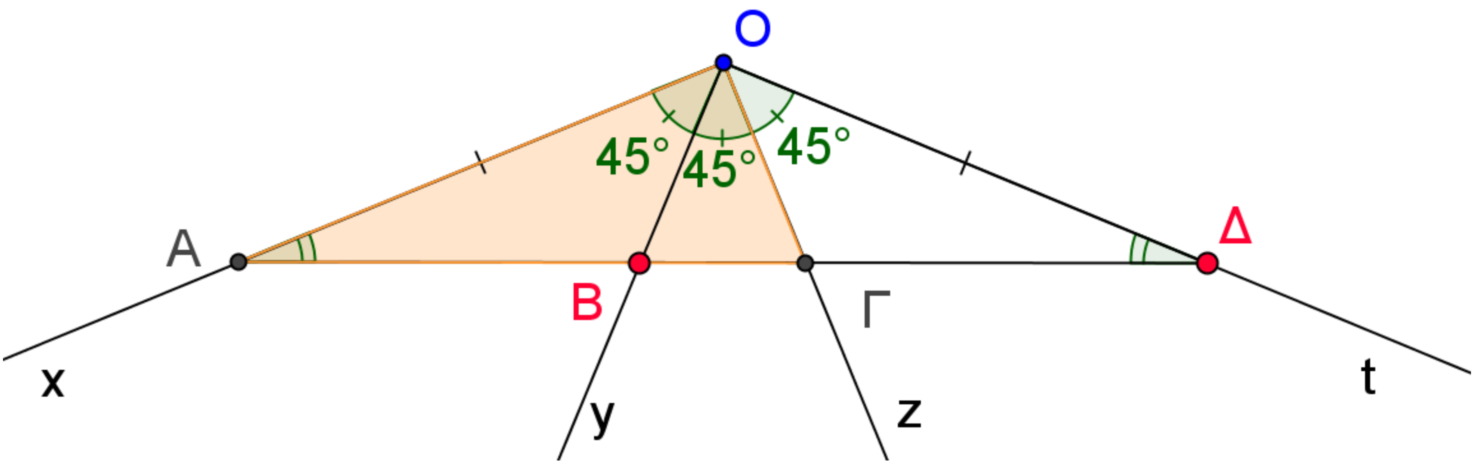
$$\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{MA}{M\Gamma} \quad (2)$$

Αλλά ΜΒ=ΜΓ (3) *(αφού ΑΜ διάμεσος)*

Από (1) (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{EA}{E\Gamma} \Leftrightarrow EA \cdot \Delta B = E\Gamma \cdot \Delta A \overset{\Delta A = A\Delta}{\Leftrightarrow} EA \cdot \Delta B = E\Gamma \cdot A\Delta$$

Α1. Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45°$ και τα σημεία Α, Δ των Οx, Οt αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΔ. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ΑΔ με τις Οy, ΟΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot A\Delta$.



Λύση:

Στο τρίγωνο ΟΑΓ η ΟΒ είναι διχοτόμος, επομένως από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{OA}{O\Gamma} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΟΑΓ η ΟΔ είναι εξωτερική διχοτόμος, γιατί $O\Delta \perp OB$. *(Γνωρίζουμε Θεώρημα ΙΙΙ σ. 20 ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες, οπότε η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου είναι κάθετες μεταξύ τους).*Αρα απο το θεώρημα εξωτερικής διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} = \frac{OA}{O\Gamma} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta A}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot \Delta\Gamma = B\Gamma \cdot A\Delta \overset{A\Delta=\Delta A}{\Leftrightarrow} AB \cdot \Delta\Gamma = B\Gamma \cdot \Delta A \quad (3)$$

Μένει να αποδείξουμε ότι ΑΒ=ΔΓ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ.Αυτά έχουν:

- ΟΑ=ΟΔ *(από δεδομένα)*
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_3 = 45°$
- $\hat{A} = \hat{\Delta}$ *(ως προσκείμενες γωνίες στην βάση ΑΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΔ)*

  Αρα απο κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και ΑΒ=ΔΓ.

  Πλέον η (3) γίνεται:

$$AB \cdot AB = B\Gamma \cdot \Delta A \overset{AB=\Delta\Gamma}{\Leftrightarrow} AB^2 = B\Gamma \cdot \Delta A.$$

Αθανασίου Δημήτρης *asepfreedom@yahoo.gr*