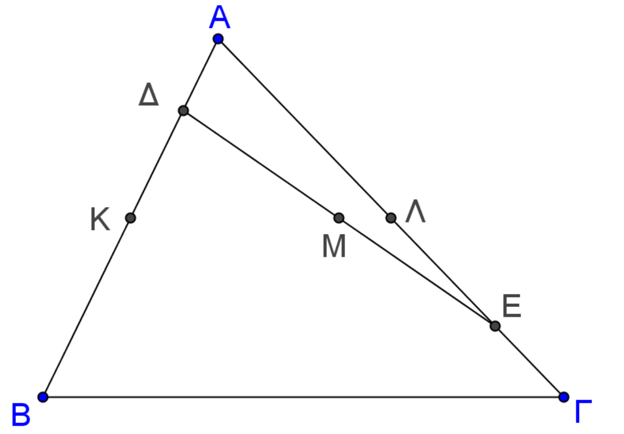
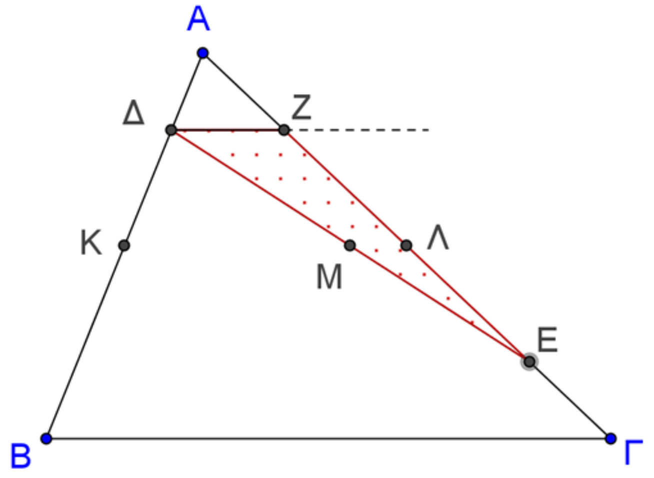
**Σύνθετα θέματα**




**Σ1.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε* $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{EA}$.

*Να αποδείξετε ότι τα μέσα Κ, Λ, Μ των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά σημεία.*

***Λύση:***




Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ επειδή ΔΖ//ΒΓ από Πόρισμα στο θεώρημα Θαλή *σ.152* ισχύει:

$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AZ}{Z\Gamma}$ και επειδή από τα δεδομένα $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{EA}$

έχουμε:

$$\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{EA} \Leftrightarrow \frac{AZ}{AZ + Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{E\Gamma + EA} \Leftrightarrow \frac{AZ}{A\Gamma} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow AZ = E\Gamma$$

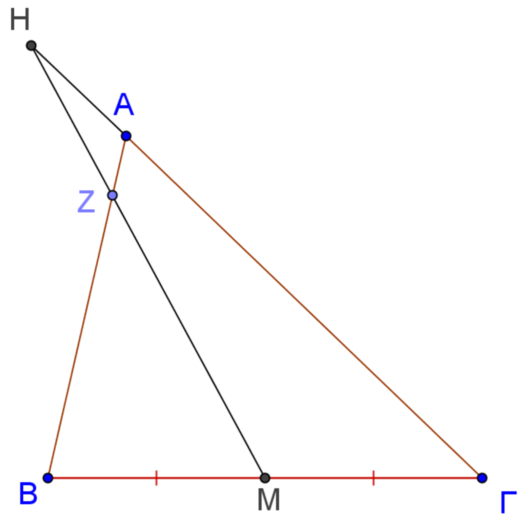
Από την τελευταία σχέση και δεδομένου ότι ΛΑ=ΛΓ προκύπτει:

ΛΖ=ΛΑ-ΑΖ=ΛΓ-ΕΓ=ΛΕ δηλαδή το Λ είναι μέσο του ΖΕ.

$$\left.\begin{matrix} \text{Κ μέσο ΑΒ} \\ \text{Λ μέσο ΑΓ} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ΚΛ//ΒΓ}$$ *(Θεώρημα Ι σ.104 )*

Στο τρίγωνο ΔΖΕ το Λ είναι μέσο του ΖΕ και ΚΛ//ΔΖ άρα *(Θεώρημα ΙΙ σ.104)* θα διέρχεται από το μέσο Μ του ΔΕ δηλαδή τα Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

**Σ2.** *Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τυχαία ευθεία, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΖΑ • ΗΓ = ΗΑ • ΖΒ.*



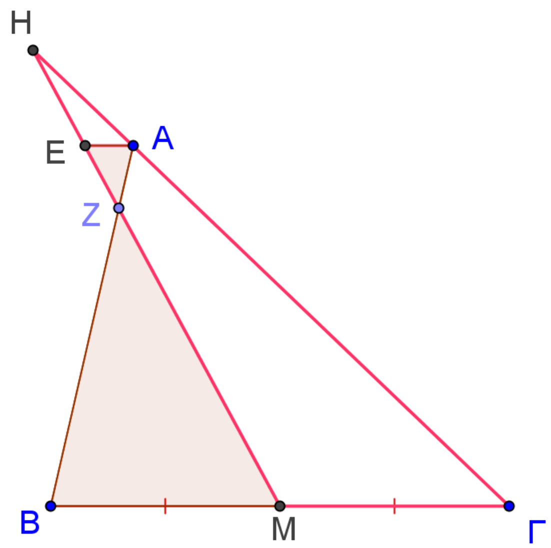

***Λύση:***

Φέρνουμε ΑΕ//ΒΓ.

Τότε στο τρίγωνο ΗΜΓ από Πόρισμα στο θεώρημα του Θαλή *(σ.152)* έχουμε:

$$\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{H\Gamma}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{M\Gamma}} \quad (1)$$

και επειδή προφανώς ΑΕ//ΒΜ, στο τρίγωνο ΖΒΜ από *Σ.Ε.Θ.* *(Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

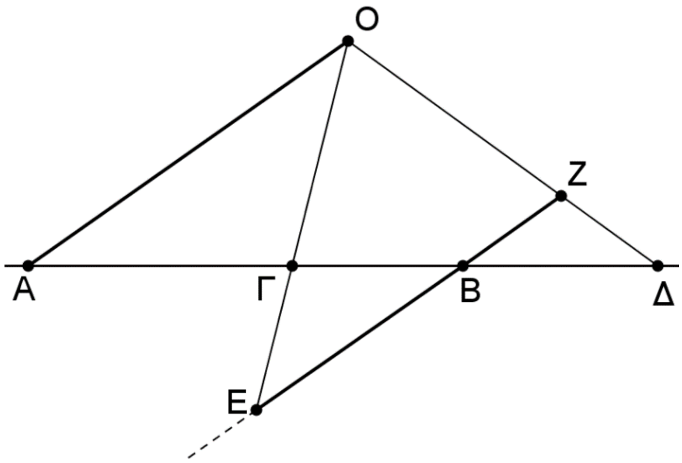



$$\frac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{ZB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{MB}} \overset{\mathrm{MB=M\Gamma}}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{ZB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{M\Gamma}} \quad (2)$$

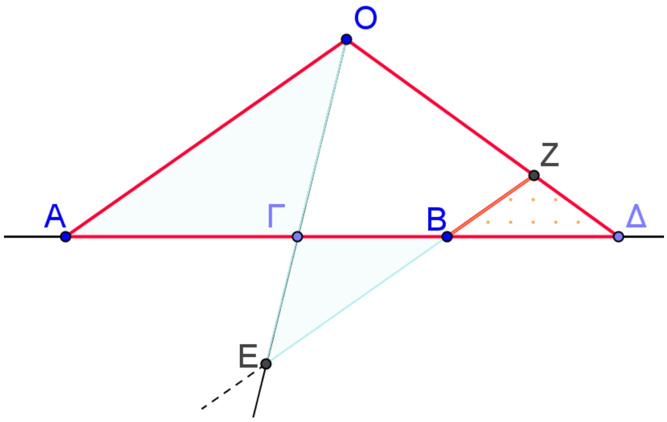
Από (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{H\Gamma}}=\frac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{ZB}} \Leftrightarrow \mathrm{ZA}\cdot\mathrm{H\Gamma}=\mathrm{HA}\cdot\mathrm{ZB}$$

**Σ3.** *Δίνεται ευθεία ε, τέσσερα διαδοχικά σημεία της Α, Γ, Β, Δ και σημείο Ο εκτός αυτής. Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΟΑ, η οποία τέμνει τις ΟΓ, ΟΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β, αν και μόνο αν ΒΕ = ΒΖ.*




***Λύση:***




- Αν τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β σύμφωνα με τον ορισμό *(σ.155)* ισχύει:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \quad \textbf{(1)}$$

- Επειδή ΒΕ//ΑΟ από *από Σ.Ε.Θ. (Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{AO}{BE} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} \quad \textbf{(2)}$$

- Επειδή ΒΖ//ΑΟ από *από Σ.Ε.Θ. (Σημαντική Εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή - Θεώρημα σ.153)* έχουμε:

$$\frac{AO}{BZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \quad \textbf{(3)}$$

Από ***(1) (2) (3)*** συνάγεται: $\frac{AO}{BE} = \frac{AO}{BZ} \Leftrightarrow BE = BZ$

**Αντίστροφα:**

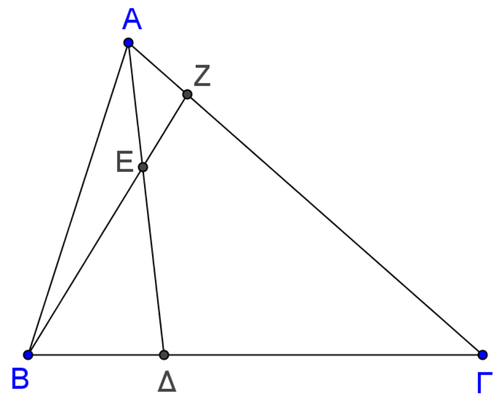
Αν ΒΕ=ΒΖ από ***(2)*** και ***(3)*** έχουμε:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

Αρα τα Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Α, Β.

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr

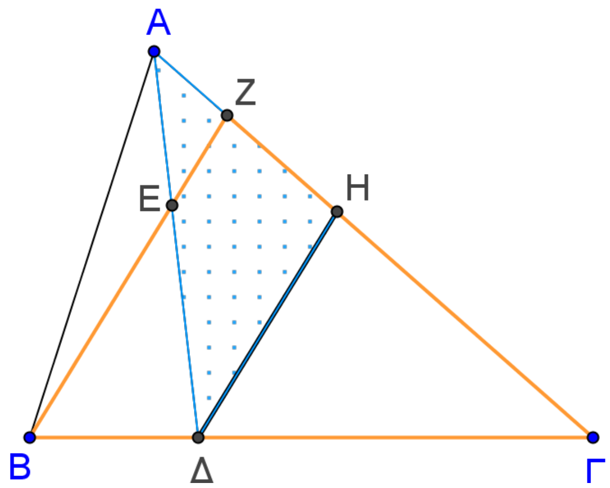
**Σ4.** *Αν ένα σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ σε λόγο λ και ένα σημείο Ε χωρίζει εσωτερικά το ΑΔ σε λόγο κ, να υπολογισθεί ο λόγος στον οποίο χωρίζει η ευθεία ΒΕ την πλευρά ΑΓ.* ***Λύση:***




«Μεταφράζοντας» το λεκτικό της εκφώνησης σε αλγεβρικές σχέσεις έχουμε:

$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = λ$ και $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = κ$ και ζητάμε να βρούμε το $\frac{ΖΑ}{ΖΓ}$

Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΖ που τέμνει την ΑΓ στο Η.




- Επειδή ΕΖ//ΔΗ από θεώρημα Θαλή στο τρίγωνο ΑΔΗ έχουμε:

$$\frac{ΖΑ}{ΖΗ} = \frac{ΕΑ}{ΕΔ} = κ$$

Αρα $\frac{ΖΑ}{ΖΗ} = κ$ (1)

- Επειδή ΔΗ//ΒΖ από θεώρημα Θαλή στο στίγωνο ΓΒΖ έχουμε:

$$\frac{ΖΗ}{ΗΓ} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ} = λ$$

- Από γνωστή ιδιότητα των αναλογιών:

$$\frac{ΖΗ}{ΗΓ} = λ \Leftrightarrow \frac{ΖΗ}{ΗΓ} = \frac{λ}{1} \Leftrightarrow \frac{ΖΗ}{ΖΗ + ΗΓ} = \frac{λ}{λ+1} \Leftrightarrow \frac{ΖΗ}{ΖΓ} = \frac{λ}{λ+1} \quad (2)$$

- Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{ΖΑ}{ΖΗ} \cdot \frac{ΖΗ}{ΖΓ} = κ \cdot \frac{λ}{λ+1} \Leftrightarrow \frac{ΖΑ}{ΖΓ} = \frac{κλ}{λ+1}.$$