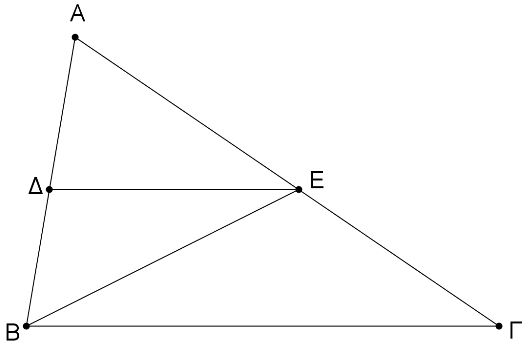
Α4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.*

Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΕ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$.



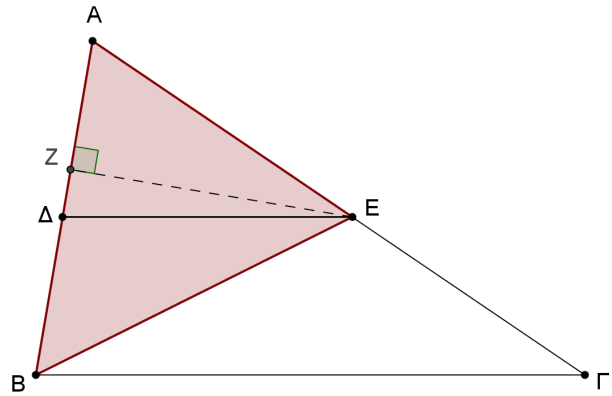
ΛΥΣΗ:

Αφού τα θεωρήματα του 10.5 αναφέρονται σε λόγους εμβαδών, σκεφτόμαστε να γράψουμε την αποδεικτέα ισότητα ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)} \qquad \textbf{(1)}$$

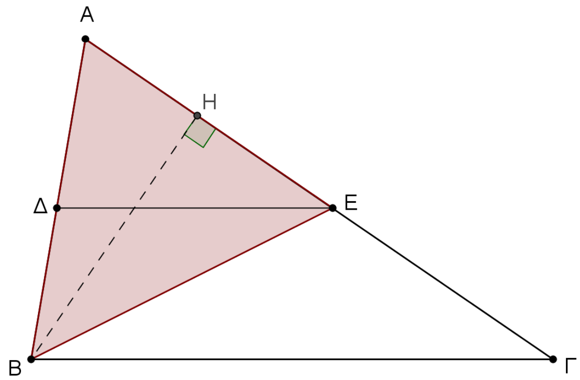
►*Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ έχουν κοινό το ύψος από την κορυφή Ε, άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των αντίστοιχων βάσεων.*

$$\frac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} \qquad \textbf{(2)}$$



►*Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ έχουν κοινό το ύψος από την κορυφή Β, άρα ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των αντίστοιχων βάσεων.*

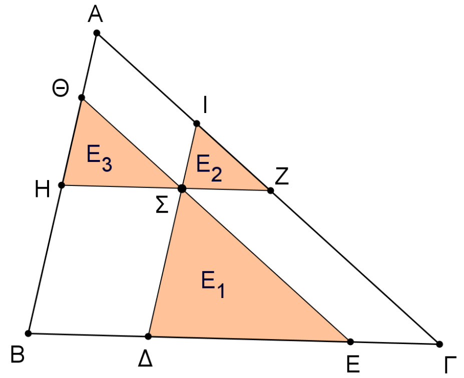
$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ} \qquad \textbf{(3)}$$



Επειδή όμως ΔΕ//ΒΓ από Θεώρημα Θαλή έχουμε:

$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$, *οπότε από τις* **(2)** *και* **(3)** *προκύπτει η* **(1).**

Σ2 *Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του.*



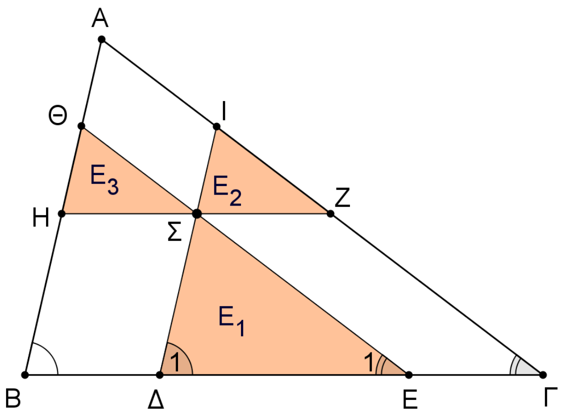
Αν E_1, E_2, E_3 είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι :

i) *καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών E_1, E_2, E_3 είναι όμοιο με το ΑΒΓ,*

ii) $\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}+\sqrt{E_3}=\sqrt{E}$

ΛΥΣΗ:

i) Επειδή ΣΔ//ΑΒ θα είναι $\hat{\Delta}_1=\hat{B}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.



Επειδή ΣΕ//ΒΓ θα είναι $\hat{E}_1=\hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Αρα τα τρίγωνα ΣΔΕ και ΑΒΓ έχουν δύο γωνίες του ενός ίσες με δύο γωνίες του άλλου, οπότε από γνωστό κριτήριο θα είναι όμοια.

Παρόμοια δείχνουμε ότι και τα ΘΗΣ και ΙΣΖ είναι όμοια με το τρίγωνο ΑΒΓ.

ii) Γνωρίζουμε ότι *(Θεώρημα Ι σ.222)* αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Επειδή λοιπόν το Θεώρημα αναφέρεται σε λόγους εμβαδών σκεφτόμαστε να μετασχηματίζουμε την προς απόδειξη ισοδύναμα, ώστε να εμφανιστούν λόγοι εμβαδών:

$$\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}+\sqrt{E_3}=\sqrt{E}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E}}+\frac{\sqrt{E_2}}{\sqrt{E}}+\frac{\sqrt{E_3}}{\sqrt{E}}=1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{E_1}{E}}+\sqrt{\frac{E_2}{E}}+\sqrt{\frac{E_3}{E}}=1 \quad \textbf{(*)}$$

Αρα πλέον αρκεί να αποδείξουμε την σχέση **(*).**

- Από το Θεώρημα Ι για τα τρίγωνα ΣΔΕ και ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{E_1}{E}=\left(\frac{\Delta E}{B\Gamma}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{E_1}{E}}=\sqrt{\left(\frac{\Delta E}{B\Gamma}\right)^2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{E_1}{E}}=\frac{\Delta E}{B\Gamma} \quad \textbf{(1)}$$

- Από το Θεώρημα Ι για τα τρίγωνα ΙΣΖ και ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{E_2}{E}=\left(\frac{\Sigma\Gamma}{B\Gamma}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{E_2}{E}}=\sqrt{\left(\frac{\Sigma\Gamma}{B\Gamma}\right)^2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{E_2}{E}}=\frac{\Sigma\Gamma}{B\Gamma}\overset{\substack{\text{ΣΖΓΕ παραλληλόγραμμο,}\\ \text{άρα ΣΖ=ΕΓ}}}{\Leftrightarrow}\sqrt{\frac{E_2}{E}}=\frac{E\Gamma}{B\Gamma} \quad \textbf{(2)}$$

- Από το Θεώρημα Ι για τα τρίγωνα ΘΗΣ και ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{E_3}{E}=\left(\frac{H\Sigma}{B\Gamma}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{E_3}{E}}=\sqrt{\left(\frac{H\Sigma}{B\Gamma}\right)^2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{E_3}{E}}=\frac{H\Sigma}{B\Gamma}\overset{\substack{\text{ΗΣΔΒ παραλληλόγραμμο,}\\ \text{άρα ΗΣ=ΒΔ}}}{\Leftrightarrow}\sqrt{\frac{E_3}{E}}=\frac{B\Delta}{B\Gamma} \quad \textbf{(3)}$$

Επομένως $\sqrt{\frac{E_1}{E}}+\sqrt{\frac{E_2}{E}}+\sqrt{\frac{E_3}{E}}\overset{(1)\text{ και }(2)\text{ και }(3)}{=}\frac{\Delta E}{B\Gamma}+\frac{E\Gamma}{B\Gamma}+\frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{\Delta E+E\Gamma+B\Delta}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{B\Gamma}=1$