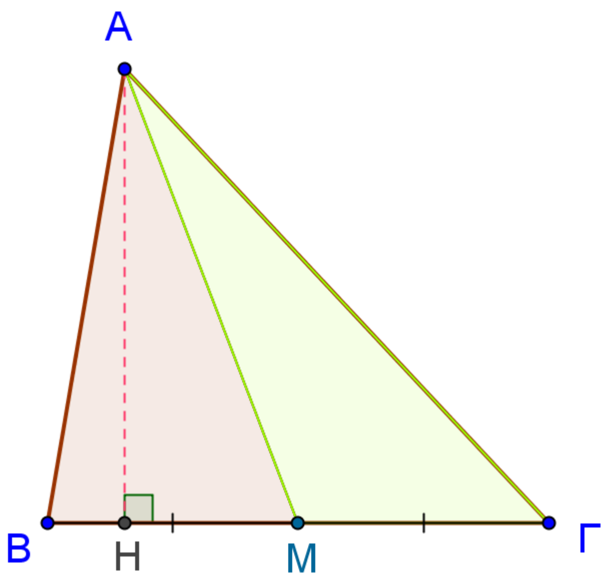
ΑΣΚΗΣΕΙΣ όπου χρησιμοποιείται το αποτέλεσμα της **εφαρμογής 3 (**σ.216) ότι:

<u>Η διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά (ισοδύναμα) τρίγωνα που το καθένα είναι ίσο με το μισό του αρχικού τριγώνου</u>

Στο διπλανό σχήμα $(\mathrm{AB M})=(\mathrm{A\Gamma M})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$

Απόδειξη:

Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΜ έχουν κοινό ύψος ΑΗ και ίσες βάσεις ΒΜ=ΜΓ επομένως:



$$(\mathrm{ABM})=\frac{1}{2}\mathrm{BM}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\Gamma\mathrm{M}\cdot\mathrm{AH}=(\mathrm{A\Gamma M})$$

Επιπλέον:

$$(\mathrm{ABM})+(\mathrm{A\Gamma M})=(\mathrm{AB\Gamma})\Leftrightarrow(\mathrm{ABM})+(\mathrm{ABM})=(\mathrm{AB\Gamma})$$

$$\Leftrightarrow 2(\mathrm{ABM})=(\mathrm{AB\Gamma})\Leftrightarrow(\mathrm{ABM})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$$

Αρα $(\mathrm{ABM})=(\mathrm{A\Gamma M})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$

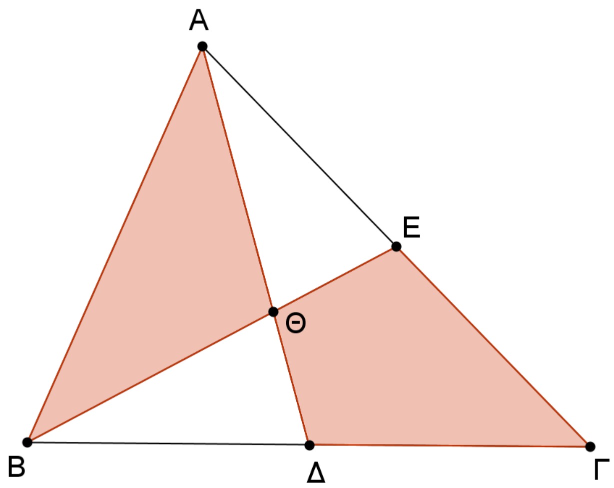
Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Α2. *(σ.217) Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:*

i) *(ΑΒΕ) = (ΒΕΓ),*

ii) *(ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) και*

iii) *(ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).*



Λύση:

i) Σύμφωνα με το βασικό αποτέλεσμα

$$(\mathrm{ABE})=(\mathrm{BE\Gamma})$$

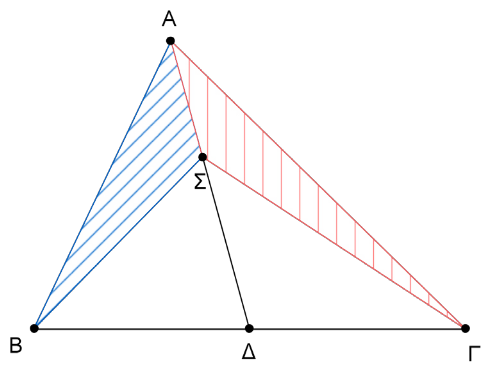
ii) Απ $(\mathrm{AB\Delta})=(\mathrm{BE\Gamma}) \Leftrightarrow (\mathrm{AB\Theta})+\cancel{(\mathrm{B\Theta\Delta})}=\cancel{(\mathrm{B\Theta\Delta})}+(\Delta\Gamma\mathrm{E\Theta}) \Leftrightarrow (\mathrm{AB\Theta})=(\Delta\Gamma\mathrm{E\Theta})$

iii) Είναι $(\mathrm{AB\Delta})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})=(\mathrm{ABE})$

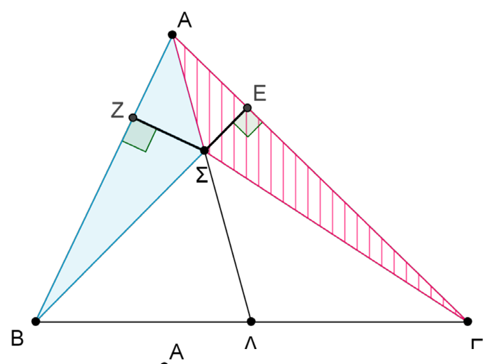
Αρα

$$(\mathrm{AB\Delta})=(\mathrm{ABE}) \Leftrightarrow \cancel{(\mathrm{AB\Theta})}+(\mathrm{B\Theta\Delta})=\cancel{(\mathrm{AB\Theta})}+(\mathrm{A\Theta E}) \Leftrightarrow (\mathrm{B\Theta\Delta})=(\mathrm{A\Theta E})$$

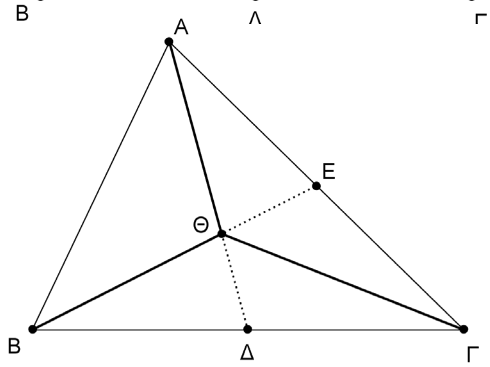
Α3. *(σ.217)* **i)** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.Φέρνουμε την διάμεσο ΑΔ και παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Σ πάνω σε αυτή. Να αποδείξετε ότι: (ΑΒΣ)=(ΑΓΣ)



ii) Από το σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΑΒ·ΣΖ=ΑΓ·ΣΕ



iii) Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ *(σημείο τομής των διαμέσων)*, να αποδείξετε ότι (ΑΒΘ)=(ΒΘΓ)=$\frac{1}{3}$(ΑΒΓ).



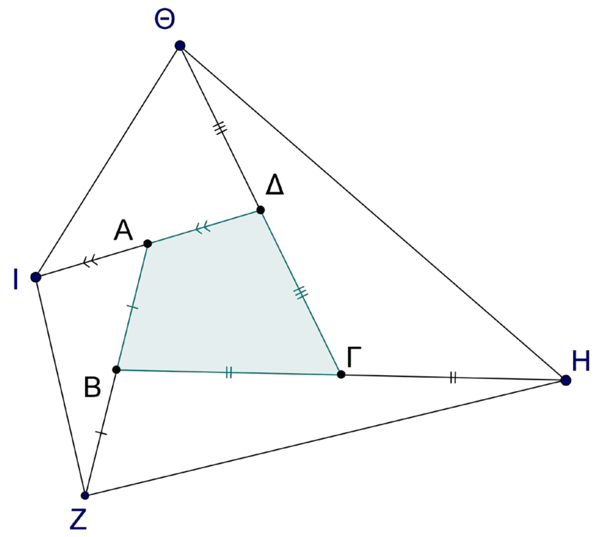
Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Σ1. *(σ.218)* *Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ =ΑΒ, ΓΗ=ΒΓ, ΔΘ=ΓΔ και ΑΙ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:*

i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ),

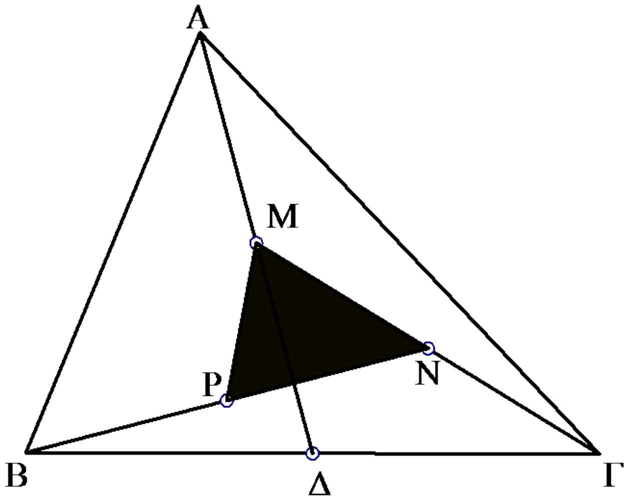
ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και

iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).



Σ2. *(σ.218)* *Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ.*

Να αποδείξετε ότι $(MNP) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$.



Λύση:

Στο τρίγωνο ΒΜΝ η ΜΡ είναι διάμεσος επομένως:

$$(\mathrm{MNP}) = \frac{1}{2}(\mathrm{BMN}) \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΒΜΓ η ΒΝ είναι διάμεσος οπότε:

$$(\mathrm{BMN}) = \frac{1}{2}(\mathrm{BM\Gamma})$$

οπότε αντικαθιστώντας στην *(1)* έχουμε

$$(\mathrm{MNP}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\mathrm{BM\Gamma}) = \frac{1}{4}(\mathrm{BM\Gamma}) = \frac{1}{4}\left[(\mathrm{BM\Delta}) + (\mathrm{M\Delta\Gamma})\right] \overset{(2),\,(3)}{=} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Delta}) + \frac{1}{2}(\mathrm{A\Gamma\Delta})\right] =$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2}\left[(\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{A\Gamma\Delta})\right] = \frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma}).$$

- Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΜ είναι διάμεσος οπότε:

$$(\mathrm{BM\Delta}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Delta}) \quad (2)$$

- Στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΜ είναι διάμεσος οπότε:

$$(\mathrm{M\Delta\Gamma}) = \frac{1}{2}(\mathrm{A\Gamma\Delta}) \quad (3)$$