ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11.3

Παραθέτουμε για εύκολη αναφορά το πινακάκι με την αντιστοιχία χορδών-αποστημάτων-τόξων που χρειάζεται σε όλες σχεδόν τις παρακάτω ασκήσεις

	Κανονικό εξάγωνο	Τετράγωνο	Ισόπλευρο τρίγωνο
Πλευρά λν –Χορδή	$\lambda_6 = R$	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$
Απόστημα	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$
Τόξο	60^o	90^o	120^o

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Χαρακτηρίστε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω ισότητες, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

i) $\lambda_6^2 + \lambda_3^2 = \lambda_4^2$ Σ Λ

ii) $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 = 3R\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ Σ Λ

iii) $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ Σ Λ

Απάντηση:

i) $\lambda_6^2 + \lambda_3^2 = R^2 + \left(\sqrt{3}R\right)^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2 = \left(2R\right)^2 \neq \left(\sqrt{2}R\right)^2 = \lambda_4^2$.

Αρα η δοθείσα σχέση είναι **λανθασμένη (Λ)**..

ii) $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6 = \sqrt{3}R + \sqrt{2}R + R = R\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)$ άρα η δοθείσα είναι **λανθασμένη (Λ)**.

iii) $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6 = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{2}R}{2} + \frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

Επομένως η δοθείσα σχέση είναι **σωστή** (Σ).

2. Αν Α, Β, Γ Δ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε $AB = R\sqrt{2}$, ΒΓ = λ_{12} και ΓΔ = R, να εξηγήσετε γιατί η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

Απάντηση:

Αφού $AB = R\sqrt{2}$ θα είναι $\overset{\frown}{AB} = 90°$ και αφού ΒΓ = λ_{12} θα είναι $\overset{\frown}{B\Gamma} = 30°$ και τέλος αφού ΓΔ = R θα είναι $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60°$.

Αρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 90° + 30° + 60° = 180°$ δηλαδή το τόξο $\overset{\frown}{A\Delta}$ είναι ημικύκλιο οπότε συνακόλουθα η ΑΔ είναι διάμετρος.

3. Αν Α, Β, Γ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε ΑΒ = 120° και ΒΓ = 60°, η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

α. $\left(3+\sqrt{3}\right)R$, **β.** $4R$, **γ.** $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)R$, **δ.** $\left(3+\sqrt{2}\right)R$,

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Αφού $\overset{\frown}{AB} = 120°$ θα είναι $AB = \sqrt{3}R$.

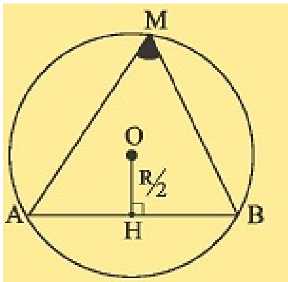
Αφού $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60°$ θα είναι $B\Gamma = R$.

Θα είναι $\overset{\frown}{A\Gamma} = 360° - 120° - 60° = 180°$ άρα ΑΓ διάμετρος $A\Gamma = 2R$

Οπότε περίμετρος ΑΒΓ= $AB + B\Gamma + A\Gamma = \sqrt{3}R + R + 2R = \sqrt{3}R + 3R = \left(\sqrt{3}+3\right)R$ δηλαδή η ορθή απάντηση είναι το **α.**

4. Στο διπλανό σχήμα η γωνία Μ είναι:

α. 30° **β.** 45° **γ.** 50° **δ.** 60° **ε.** 75°



Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Βλέπουμε ότι το απόστημα είναι $\frac{R}{2}$ που είναι το απόστημα που αντιστοιχεί σε χορδή $\frac{\sqrt{3}R}{2}$ δηλαδή χορδή τόξου 120°.

Αρα η γωνία Μ ως εγγεγραμμένη θα έχει μέτρο το μισό του αντίστοιχου τόξου της δηλαδή θα είναι 60° δηλαδή η ορθή απάντηση είναι το **δ.**

Ασκήσεις Εμπέδωσης

Ε1.Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου, ενός τετραγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου, που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O,R).

ΛΥΣΗ:

$$E_3 = \frac{1}{2}P_3\alpha_3 = \frac{1}{2}3\lambda_3\alpha_3 = \frac{1}{2}3R\sqrt{3}\frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

$$E_4 = \frac{1}{2}P_4\alpha_4 = \frac{1}{2}4\lambda_4\alpha_4 = 2R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2} = 2R^2$$

$$E_6 = \frac{1}{2}P_6\alpha_6 = \frac{1}{2}6\lambda_6\alpha_6 = 3\lambda_6\alpha_6 = 3R\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

Ε2. Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα R = 10 cm και απόστημα $\alpha_\nu = 5\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί η πλευρά του λν και το εμβαδόν του E_ν. *(Απ: $150\sqrt{3}$)*

ΛΥΣΗ:

Παρατηρούμε ότι $\alpha_\nu = 5\sqrt{3} = \frac{10}{2}\sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ και από το πινακάκι διαπιστώνω ότι πρόκειται για κανονικό εξάγωνο οπότε :

λν=R=10cm και

$$E_\nu = \frac{1}{2}P_\nu \cdot \alpha_\nu = \frac{1}{2}6\cdot\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu = 3\cdot\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu = 3\cdot 10\cdot 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

Ε3. Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα R = 8 cm και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}$. Να βρεθούν:

i) το απόστημά του α_ν και

ii) το εμβαδόν του.

ΛΥΣΗ:

Παρατηρούμε ότι $\lambda_\nu = R\sqrt{2}$ οπότε από το πινακάκι διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για τετράγωνο.

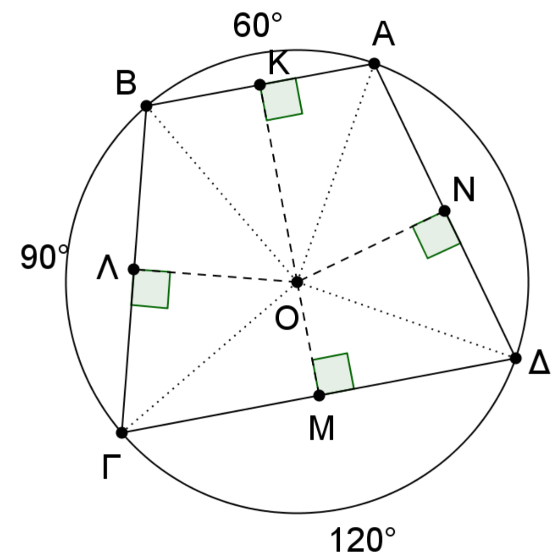
Επομένως το απόστημά του θα είναι *(πάλι από το πινακάκι)* $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ και

ii) $E_4 = \frac{1}{2}P_4\cdot\alpha_4 = \frac{1}{2}4\cdot\lambda_4\cdot\alpha_4 = 2R\sqrt{2}\cdot\frac{R\sqrt{2}}{2} = 2R^2 = 2\cdot 8^2 = 2\cdot 64 = 128\text{ cm}^2.$

Σημείωση: Φυσικά το πινακάκι θα μπορούσε να συμπληρωθεί και με τύπο για το εμβαδό κάθε κανονικού πολυγώνου να μην το υπολογίζουμε κάθε φορά.

Ε4. Σε κύκλο (Ο,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\widehat{AB}=60°$, $\widehat{B\Gamma}=90°$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ = 120°. Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές και το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

ΛΥΣΗ:



- Αφού $\widehat{AB}=60°$ θα είναι ΑΒ=R , $OK=\alpha_6=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ οπότε

$$(OAB)=\frac{1}{2}\lambda_6\alpha_6=\frac{1}{2}R\frac{R\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$$

- Αφού $\widehat{B\Gamma}=90°$ θα είναι $B\Gamma=R\sqrt{2}$, $O\Lambda=\alpha_4=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ και

$$(OB\Gamma)=\frac{1}{2}\lambda_4\alpha_4=\frac{1}{2}R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{2R^2}{4}=\frac{R^2}{2}$$

- Αφού $\widehat{\Gamma\Delta}=120°$ θα είναι $\Gamma\Delta=R\sqrt{3}$, $OM=\alpha_3=\dfrac{R}{2}$ και

$$(O\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3=\frac{1}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$$

- Τέλος $\widehat{A\Delta}=360°-\widehat{AB}-\widehat{B\Gamma}-\widehat{\Gamma\Delta}=360°-60°-90°-120°=90°$.Άρα $A\Delta=R\sqrt{2}$, $ON=\alpha_4=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ και

$$(OA\Delta)=\frac{1}{2}\lambda_4\alpha_4=\frac{1}{2}R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2}=\frac{2R^2}{4}=\frac{R^2}{2}$$

Οπότε:

$$(AB\Gamma\Delta)=(OAB)+(OB\Gamma)+(O\Gamma\Delta)+(OA\Delta)=\frac{\sqrt{3}R^2}{4}+\frac{R^2}{2}+\frac{\sqrt{3}R^2}{4}+\frac{R^2}{2}=\frac{2R^2}{2}+\frac{2\sqrt{3}R^2}{4}=\frac{R^2}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Παρατήρηση: Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι επεδή $\widehat{B\Gamma}=\widehat{A\Delta}=90°$ οπότε ΑΒ//ΓΔ δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο οπότε το εμβαδόν του είναι

$$(AB\Gamma\Delta)=\frac{1}{2}(AB+\Delta\Gamma)(OK+OM)=\frac{1}{2}\left(R+R\sqrt{3}\right)\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}+\frac{R}{2}\right)=\frac{1}{2}R\left(1+\sqrt{3}\right)R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}R^2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}R^2\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}R^2\frac{1+2\sqrt{3}+3}{2}=\frac{1}{2}R^2\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}R^2\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

Α1. Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πολυγώνου είναι 8 ορθές και το εμβαδόν του $6\sqrt{3}$ cm^2. Να βρεθεί η ακτίνα του.

ΛΥΣΗ:

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός οποιουδήποτε ν-γώνου είναι $(\nu-2)\cdot 180°$ ή

$(\nu-2)\cdot 2 = 2\nu - 4$ ορθές. Αρα εδώ $2\nu - 4 = 8 \Leftrightarrow 2\nu = 4+8 \Leftrightarrow 2\nu = 12 \Leftrightarrow \nu = 6$

$$\mathrm{E}_6 = \frac{1}{2}P_6 \cdot \alpha_6 = \frac{1}{2}6\cdot\lambda_6\cdot\alpha_6 = 3R\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

Μας δίνεται όμως ότι $\mathrm{E}_6 = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2} = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{2} = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{3R^2}{2} = 6 \Leftrightarrow R^2 = 4 \overset{R>0}{\Leftrightarrow} R = 2$

Α2. Σε κύκλο (Ο,R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές του ΑΒ και ΓΔ, ώστε ΑΒ = R και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΔΓ, το ύψος του και το εμβαδόν του, ως συνάρτηση του R.

ΛΥΣΗ:

Αφού ΑΒ=R θα είνια $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 60°$ και αφού $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$ θα είναι $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120°$.

Επειδή ΑΒ //ΓΔ θα είναι $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = \overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta}$ οπότε δεδομένου ότι

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} + \overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta} = 360° \Leftrightarrow 60° + 120° + 2\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 360° \Leftrightarrow 180° + 2\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 360° \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 360° - 180° \Leftrightarrow 2\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 180° \Leftrightarrow \overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma} = 90°$$

Αρα $\mathrm{A}\Gamma = R\sqrt{2}$.Αλλά και $\mathrm{B}\Delta = R\sqrt{2}$ δεδομένου ότι σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές.

Για το ύψος ΖΗ του τραπεζίου ΑΒΓΔ έχουμε:

$$\mathrm{ZH} = \mathrm{OZ} + \mathrm{OH} = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\left(\mathrm{AB}\Gamma\Delta\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{AB} + \Delta\Gamma\right)\mathrm{HZ} = \frac{1}{2}\left(R + R\sqrt{3}\right)\frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{R}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{R^2}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}R^2\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2} = \frac{1}{2}R^2\frac{1+2\sqrt{3}+3}{2} = \frac{1}{2}R^2\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}R^2\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Α3. Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R η πλευρά λ_{12} και το απόστημα α_{12} ενός κανονικού 12-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R).

ΛΥΣΗ:

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \Gamma\mathrm{H}\cdot\Gamma\Delta \Leftrightarrow \lambda_{12}^2 = 2R\cdot\left(\mathrm{O\Gamma}-\mathrm{O\Delta}\right) \Leftrightarrow \lambda_{12}^2 = 2R\left(R-\alpha_6\right) \Leftrightarrow \lambda_{12}^2 = 2R\left(R-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda_{12}^2 = R^2\left(2-2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

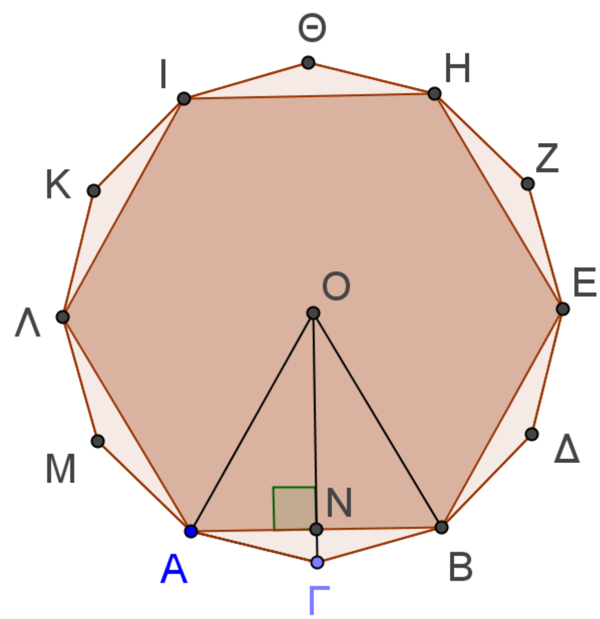
$$\Leftrightarrow \lambda_{12}^2 = R^2\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Από την γνωσή ισότητα:

$$\frac{\lambda_{12}^2}{4}+\alpha_{12}^2 = R^2 \Leftrightarrow \lambda_{12}^2+4\alpha_{12}^2 = 4R^2 \Leftrightarrow 4\alpha_{12}^2 = 4R^2-\lambda_{12}^2 \Leftrightarrow \alpha_{12}^2 = \frac{1}{4}4R^2-\lambda_{12}^2$$

Α4. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R το εμβαδόν ενός κανονικού δωδεκαγώνου, χωρίς να υπολογίσετε προηγουμένως την πλευρά και το απόστημά του.

ΛΥΣΗ:



Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει ένα κανονικό 12-γωνο και ένα κανονικό 6 γωνο που προκύπτει αν ενώσω μία παρά μία τις κορυφές του κανονικού 12-γώνου.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΓΒ είναι ίσα (ΠΠΠ) οπότε και ισεμβαδικά δηλαδή (ΑΟΓ)=(ΓΟΒ) οπότε

(ΟΑΓΒ)= (ΑΟΓ)+(ΓΟΒ)=2 (ΑΟΓ)

Τώρα προφανώς

$$\mathrm{E}_{12} = 12\cdot\left(\mathrm{OA\Gamma}\right) = 6\cdot\left[2\left(\mathrm{OA\Gamma}\right)\right] = 6\left(\mathrm{OA\Gamma B}\right) \quad (1)$$

Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ επειδή έχει κάθετες διαγωνίους, το εμβαδόν του ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του

(§ 10.3 Εφαρμογή 2^{η} κια ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ)

$$\left(\mathrm{OA\Gamma B}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{O\Gamma} = \frac{1}{2}\lambda_6\cdot R = \frac{1}{2}R\cdot R = \frac{1}{2}R^2$$

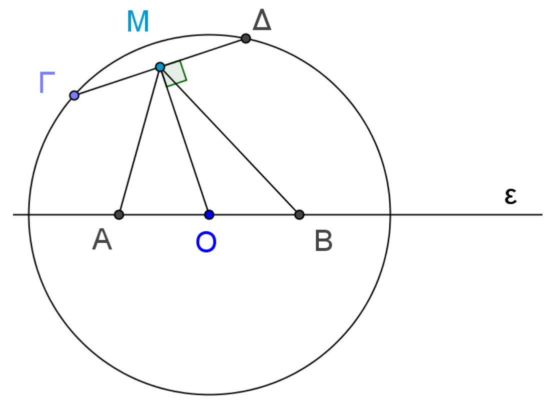
Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$\mathrm{E}_{12} = 6\left(\mathrm{OA\Gamma B}\right) = 6\frac{1}{2}R^2 = 3R^2$$

Σύνθετα Θέματα

Σ1. Δίνεται κύκλος (O,R) και χορδή του ΓΔ = λ_6. Πάνω σε τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο και εκατέρωθεν του O παίρνουμε σημεία A, B, ώστε OA = OB = α_3. Αν M το μέσο της ΓΔ, να αποδείξετε ότι: $MA^2 + MB^2 = \lambda_4^2$.

ΛΥΣΗ:



Φέρνουμε το MO το οποίο στο τρίγωνο MAB είναι διάμεσος.

Επιπλέον επειδή M μέσο της χορδής ΓΔ, θα είναι $OM \perp Γ\Delta$.

(Στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΓΔ η διάμεσος ΟΜ θα είναι και ύψος Πόρισμα Ι §3.4)

$OM = \alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Από το 1ο θεώρημα διαμέσων *(§ 9.5)* έχουμε:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MO^2 + \frac{\left(2OA^2\right)}{2} = 2MO^2 + \frac{4OA^2}{2} =$$

$$2\left(MO^2 + OA^2\right) = 2\left(\alpha_6^2 + \alpha_3^2\right) = 2\left[\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = 2\left(\frac{3R^2}{4} + \frac{R^2}{4}\right) = 2\frac{4R^2}{4}$$

$$= 2R^2 = \left(\sqrt{2}R\right)^2 = \lambda_4^2$$

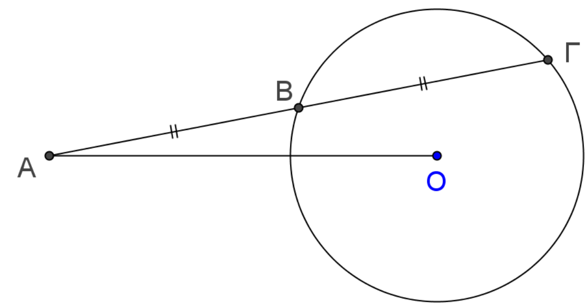
Σ2. Από το σημείο Α εκτός κύκλου (Ο, R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ, ώστε ΑΒ = ΒΓ. Αν $\mathrm{OA}=\sqrt{7}R$ να αποδείξετε ότι:

i) ΒΓ = λ_3 και στη συνέχεια

ii) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ.

ΛΥΣΗ:

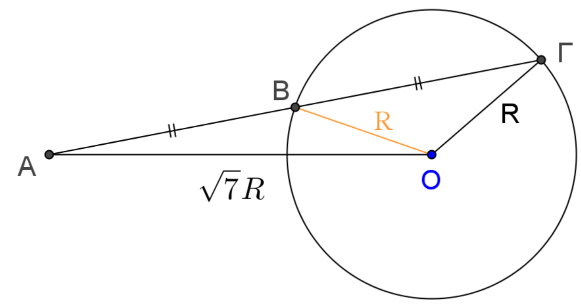
i) Επειδή ΑΒΓ τέμνουσα και Α εξωτερικό σημείο του κύκλου είναι:



$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{OA}^2-R^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}\cdot 2\mathrm{AB}=\left(\sqrt{7}R\right)^2-R^2 \Leftrightarrow 2\mathrm{AB}^2=7R^2-R^2 \Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{AB}^2=6R^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=3R^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\sqrt{3R^2} \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\lambda_3.$$

Σχόλιο: Η ΑΓ υπολογίζεται και από το 1° θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΟΓ:



$$\mathrm{OA}^2+\mathrm{O\Gamma}^2=2\mathrm{OB}^2+\frac{\mathrm{A\Gamma}^2}{2} \Leftrightarrow 2\mathrm{OA}^2+2\mathrm{O\Gamma}^2=4\mathrm{OB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2=2\mathrm{OA}^2+2\mathrm{O\Gamma}^2-4\mathrm{OB}^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2=2\left(\sqrt{7}R\right)^2+2R^2-4R^2 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2=2\cdot 7R^2-2R^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}^2=12R^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}=\sqrt{12R^2} \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}=2\sqrt{3}R$$

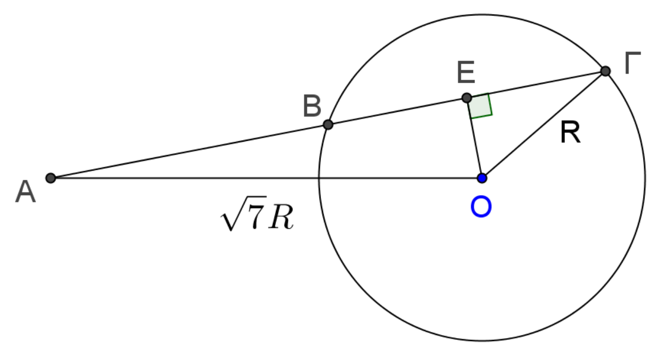
Επομένως $\mathrm{B\Gamma}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}=\frac{2\sqrt{3}R}{2}=\sqrt{3}R=\lambda_3$.

ii) Επειδή στο τρίγωνο ΑΟΓ η ΟΒ είναι διάμεσος έχουμε:

$$\left(\mathrm{AO\Gamma}\right)=2\left(\mathrm{BO\Gamma}\right)=2\frac{1}{2}\lambda_3\cdot\alpha_3=\lambda_3\cdot\alpha_3=R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{3}R^2}{2}$$

ή άμεσα:

$$\left(\mathrm{AO\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{OE}=\frac{1}{2}2\lambda_3\cdot\alpha_3=\lambda_3\cdot\alpha_3=R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{3}R^2}{2}$$



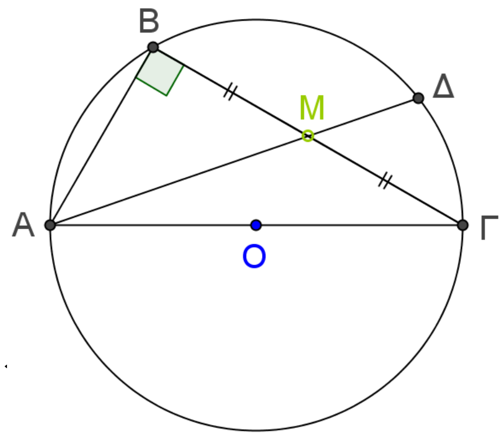
Σ3. Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, ώστε ΑΒ = λ_6 και ΒΓ = λ_3. Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Δ το σημείο που τέμνει η προέκταση της ΑΜ τον κύκλο, να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R, το τμήμα ΜΔ.

(Απ: $\mathrm{M\Delta} = \frac{3R\sqrt{7}}{14}$)

ΛΥΣΗ:

Επειδή $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 60°$ και $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}} = 120°$ θα είναι $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} = 180°$ οπότε η γωνία $\hat{\mathrm{B}} = 90°$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΜ είναι:



$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BM}^2 \Leftrightarrow \mathrm{AM}^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{AM}^2 = R^2 + \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{AM}^2 = \frac{4R^2}{4} + \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow \mathrm{AM}^2 = \frac{7R^2}{4} \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \frac{\sqrt{7}R}{2}.$$

Από το θεώρημα τεμνόμενων χορδών *(§ 9.7)*:

$$\mathrm{MA}\cdot\mathrm{M\Delta} = \mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}\cancel{R}}{\cancel{2}}\cdot\mathrm{M\Delta} = \frac{\sqrt{3}\cancel{R}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}R}{2} \Leftrightarrow \sqrt{7}\mathrm{M\Delta} = \frac{3R}{2} \Leftrightarrow \mathrm{M\Delta} = \frac{3R}{2\sqrt{7}}\cdot$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{M\Delta} = \frac{3R\sqrt{7}}{2\cdot 7} \Leftrightarrow \mathrm{M\Delta} = \frac{3R\sqrt{7}}{14}.$$

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr *peira.gr*