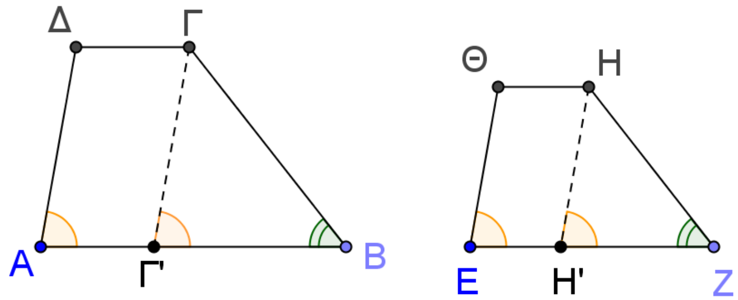
8 ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ (version 31-8-2015)

Σ1. *Να αποδείξετε ότι δύο τραπέζια με ανάλογες βάσεις και τις προσκείμενες σε δύο ομόλογες βάσεις τους γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.*

Λύση:



Θεωρούμε τα τραπέζια ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΕΖΗΘ (ΕΖ//ΗΘ) με

$\dfrac{ΑΒ}{ΕΖ}=\dfrac{ΔΓ}{ΘΗ}$ και $\hat{Α}=\hat{Ε}$ **(1)** $\hat{Β}=\hat{Ζ}$ **(2)**

Για να δείξουμε ότι είναι όμοια πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να δείξουμε ότι έχουν

α. Τις πλευρές τους ανάλογες

β. Τις γωνίες τους (*που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές*) ίσες μία προς μία.

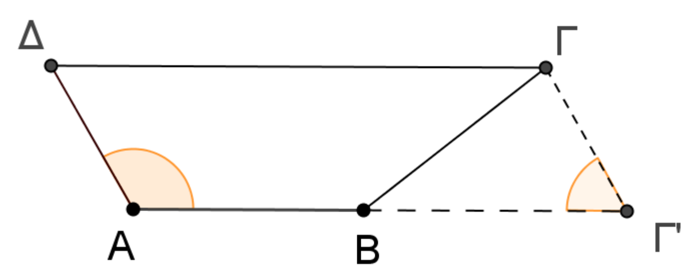
Αρχίζουμε από την ισότητα των γωνιών που είναι πιο εύκολη:

- Αφού $\hat{Α}=\hat{Ε}$ θα είναι $\hat{Δ}=180°-\hat{Α}=180°-\hat{Ε}=\hat{Θ}$
- Αφού $\hat{Β}=\hat{Ζ}$ θα είναι $\hat{Γ}=180°-\hat{Β}=180°-\hat{Ζ}=\hat{Η}$

► Εστω ΑΒ>ΓΔ.Τότε $\dfrac{ΑΒ}{ΔΓ}>1$ οπότε από επειδή $\dfrac{ΑΒ}{ΕΖ}=\dfrac{ΔΓ}{ΘΗ}\Leftrightarrow\dfrac{ΑΒ}{ΔΓ}=\dfrac{ΕΖ}{ΘΗ}$ θα ισχύει και $\dfrac{ΕΖ}{ΘΗ}>1\Leftrightarrow ΕΖ>ΘΗ$.

Φέρουμε $ΓΓ'//ΔΑ$ και $ΗΗ'//ΘΕ$.Επειδή ΑΒ>ΓΔ το $Γ'$ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒ και επειδή ΕΖ>ΘΗ το $Η'$ είναι εσωτερικό σημείο του ΕΖ.

<ins>**Σημειώσεις**</ins>: Ισως η πιο πάνω παρατήρηση μοιάζει αχρείαστη και παραξενεύει.Σκοπός της νομίζω είναι να εξασφαλίσει ότι η γωνία $Γ\hat{Γ}'Β$ που για συντομία το σχολικό την ονομάζει $\hat{Γ}'$ είναι εντός εκτός και επι τα αυτά με την $\hat{Α}$ και επομένως ίση με αυτή (δες παρακάτω) και όχι εντός και επί τα αυτά όπως στο διπλανό σχήμα οπότε θα ήταν παραπληρωματικές.



Πάντως πιστεύω θα μπορούσε να παραλειφθεί ώστε οι μαθητές να απολαμβάνουν την χαρά της απόδειξης βασιζόμενοι στο σχήμα χωρίς να νοιάζονται για εξεζετημένες λεπτομέρειες που φυσικά δεν τις παραθεωρούμε αλλά μάλλον ανήκουν σε ένα προχωρημένο μάθημα Γεωμετρίας.

Τότε $\hat{\Gamma}' = \hat{A}$ **(3)** ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $\Gamma\Gamma'$, ΔA που τέμνονται από την $A\Gamma'$.

Τότε $\hat{H}' = \hat{E}$ **(4)** ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων HH' και ΘE που τέμνονται από την EH'.

Από τις **(1), (3)** και **(4)** προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}' = \hat{H}'$ **(5)**

- Τα τρίγωνα $B\Gamma\Gamma'$ και ZHH' έχουν δύο γωνίες του ενός ίσες με δύο γωνίες του άλλου

(ισότητες **(2)** και **(5)**) άρα από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων είναι όμοια.

Επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$\frac{\Gamma'B}{H'Z} = \frac{B\Gamma}{\underline{\underline{ZH}}} = \frac{\Gamma\Gamma'}{HH'} = \frac{\Delta A}{\underline{\underline{\Theta E}}}$ **(I)** (Η τελευταία ισότητα της αναλογίας προκύπτει από το γεγονός ότι, αφού

$\Gamma\Gamma'\Delta A$ είναι παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες οπότε $\Gamma\Gamma' = \Delta A$ και αφού $HH'\Theta E$ είναι παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες οπότε $HH' = \Theta E$)

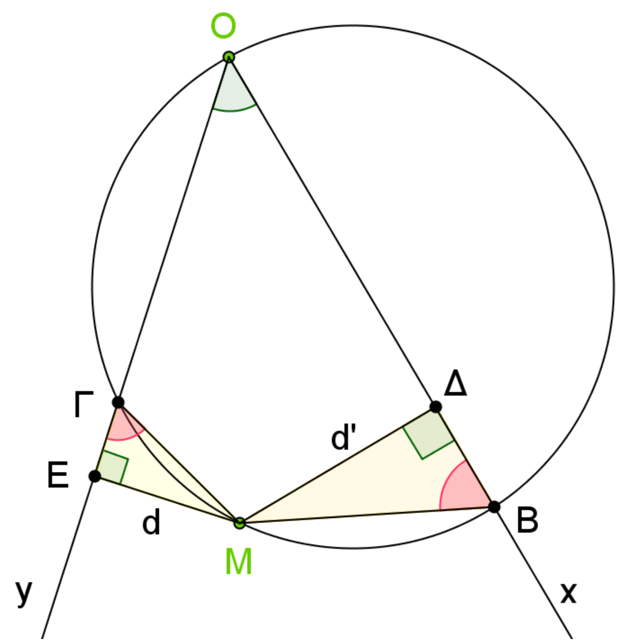
- Επίσης από τα δεδομένα και εφαρμόζοντας χρήση ιδιότητας των αναλογιών έχουμε:

$\underline{\underline{\frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H}}} = \frac{AB - \Delta\Gamma}{EZ - \Theta H} = \frac{AB - A\Gamma'}{EZ - EH'} = \frac{\Gamma'B}{H'Z}$ **(II)**

Από **(I)** και **(II)** προκύπτει ότι $\frac{AB}{EZ} = \frac{\Delta\Gamma}{\Theta H} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Delta A}{\Theta E}$ δηλαδή οι πλευρές του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τραπεζίου $EZH\Theta$.

Σ2. Εστω δοσμένη γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Μ.Ο τυχαίος κύκλος που διέρχεται από το Ο και το Μ τέμνει τις πλευρές Οx, Οy στα Β και Γ αντίστοιχα.Να αποδειχθεί ότι $\frac{\text{MB}}{\text{M}\Gamma}=\frac{d}{d'}$ όπου d και d' είναι οι αποστάσεις του Μ από τις αντίστοιχα.

Λύση:



Το τετράπλευρο ΟΒΜΓ είναι εγγεγραμμένο στην κύκλο

επομένως $\text{M}\hat{\Gamma}\text{E}=\hat{\text{B}}$ *(§6.5 Πόρισμα Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι γωνία του)*

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΜΓ και ΔΜΒ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\text{M}\hat{\Delta}\text{B}=\text{M}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ\\ \text{M}\hat{\Gamma}\text{E}=\hat{\text{B}}\end{array}\right\}$$ Αρα από το 1^{o} κριτήριο ομοιότητας είναι

όμοια, επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{\text{MB}}{\text{M}\Gamma}=\frac{\text{M}\Delta}{\text{ME}}\left(=\frac{\Delta\text{B}}{\Gamma\text{E}}\right)\Leftrightarrow\frac{\text{MB}}{\text{M}\Gamma}=\frac{d}{d'}$$

Σ3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =1 ορθή) και το ύψος του ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει το ΑΔ στο Ζ και η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}B$ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΖΕ//ΑΒ.

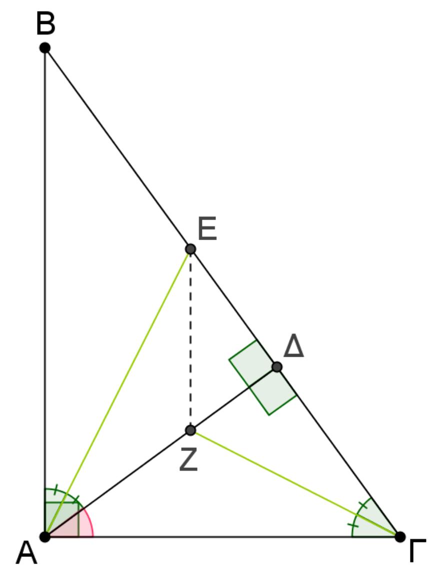
Υπόδειξη: *Να χρησιμοποιήσετε*

α) *Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου*

β) *Ομοιότητα τριγώνων*

γ) *Αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή*

Λύση:



- Στο τρίγωνο ΑΓΔ, επειδή η ΓΖ είναι διχοτόμος έχουμε: (§ 7.8)

$$\frac{AZ}{Z\Delta}=\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} \quad \textbf{(1)}$$

- Στο τρίγωνο ΑΒΔ, επειδή η ΑΕ είναι διχοτόμος έχουμε: (§ 7.8)

$$\frac{EB}{E\Delta}=\frac{AB}{A\Delta} \quad \textbf{(2)}$$

- Τα τρίγωνα ΔΓΑ και ΔΑΒ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{\Delta}B = 90^\circ \\ \hat{\Gamma} = 90^\circ - \Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}B \end{array}\right\}$$ Αρα είναι όμοια επομένως θα έχουν τις πλευρές

τους ανάλογες:

$$\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{\Gamma\Delta}{A\Delta}\left(=\frac{A\Delta}{B\Delta}\right) \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{AB}{A\Delta} \quad \textbf{(3)}$$

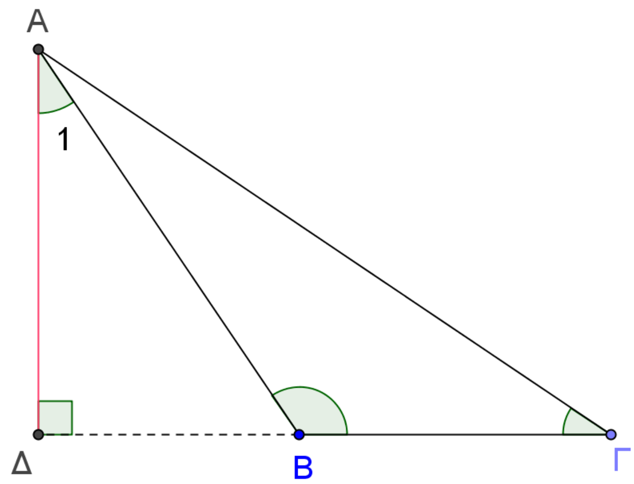
Από τις **(1)**, **(2)** και **(3)** προκύπτει ότι:

$$\frac{AZ}{Z\Delta}=\frac{EB}{E\Delta}$$

οπότε από το αντίστροφο του Θαλή στο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε ότι ΖΕ//ΑΒ.

Σ4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{B} - \hat{\Gamma}$ *= 1∟ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι* $A\Delta^2 = \Delta B \bullet \Delta\Gamma$.

Λύση:



Από την υπόθεση έχουμε ότι $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90° \Leftrightarrow \hat{B} = 90° + \hat{\Gamma}$ **(1)**

Αλλά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ, η $\hat{B}$ είναι εξωτερική γωνία, επομένως $\hat{B} = 90° + \hat{A}_1$ **(2)**

Από τις **(1), (2)** προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΔΒ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\Delta} = 90° \text{ κοινή} \\ \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 \end{array}\right\}$$ Αρα είναι όμοια (1ο κριτήριο ομοιότητας), οπότε θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

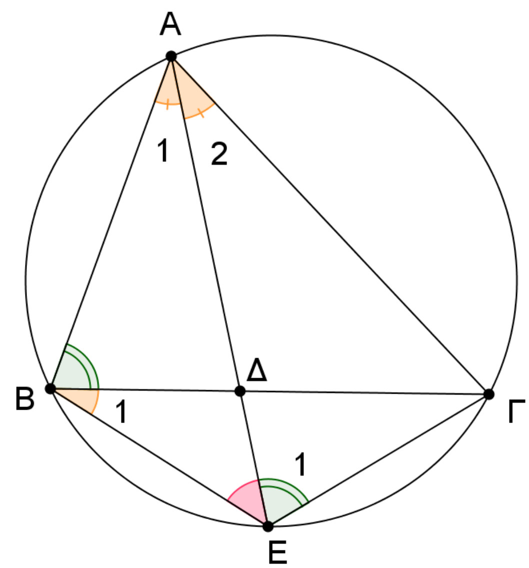
$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$$

Σ5. Η διχοτόμος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε.Να αποδείξετε ότι

i) $AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$

ii) $EB^2 = EA \cdot E\Delta$

Λύση:



i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ έχουν:

- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού ΑΔ διχοτόμος
- $\hat{B} = \hat{E}_1$ ως ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο (το $\overset{\frown}{A\Gamma}$)

Επομένως θα είναι όμοια *(1ο κριτήριο ομοιότητας)* και συνεπώς θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{AB}{A\Delta} = \frac{AE}{A\Gamma} = \left(\frac{BE}{\Delta\Gamma}\right)$$

Από $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{AE}{A\Gamma} \Leftrightarrow AB \cdot A\Gamma = A\Delta \cdot AE$

ii) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΔΕ είναι όμοια γιατί έχουν:

- $\hat{E}$ κοινή
- $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ (γιατί $\hat{B}_1 = \hat{A}_2$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο (το $\overset{\frown}{E\Gamma}$)

και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$).

Επομένως θα είναι όμοια *(1ο κριτήριο ομοιότητας)* και συνεπώς θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{EB}{E\Delta} = \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AB}{B\Delta}\right) \Leftrightarrow EB^2 = EA \cdot E\Delta$$