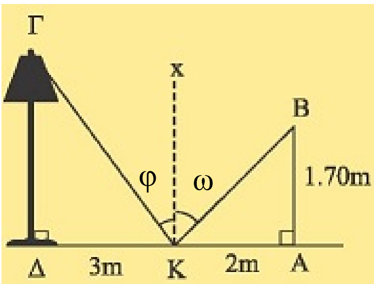
Αποδεικτικές Ασκήσεις (Version 30-8-2015)

Α1. Ο παρατηρητής ΑΒ βλέπει το φως του λαμπτήρα Γ μέσα από τον καθρέπτη Κ. Να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη ΔΓ, όταν είναι ΔΚ=3m, AK=2m και το ύψος του παρατηρητή 1,70m. (Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης).



Λύση:

Επειδή φ=ω θα είναι και $\Delta\hat{K}\Gamma = 90° - \varphi = 90° - \omega = A\hat{K}B$

Αρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΚΓ και ΑΚΒ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{\Delta\Gamma}{AB} = \frac{\Delta K}{AK}$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων προκύπτει ότι:

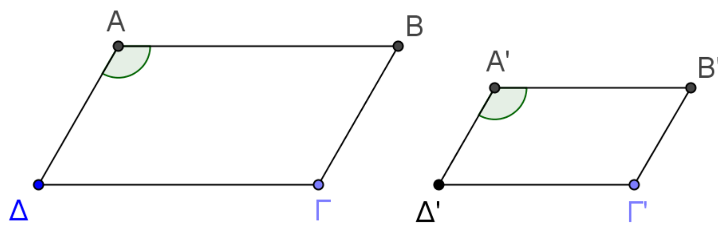
$$\frac{\Delta\Gamma}{1,7m} = \frac{3m}{2m} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{5,1}{2}m \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 2,55m$$

Α2. Να αποδείξετε ότι:

i) δύο παραλληλόγραμμα είναι όμοια, αν δύο διαδοχικές πλευρές του ενός είναι ανάλογες προς δύο διαδοχικές πλευρές του άλλου και οι γωνίες των πλευρών αυτών είναι ίσες,

ii) δύο ορθογώνια με ίση τη γωνία των διαγωνίων τους είναι όμοια.

Λύση:



i) Εστω τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και $A'B'\Gamma'\Delta'$

με $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}$ και $\hat{A} = \hat{A}'$.

- Γνωρίζουμε ότι οι απέναντι πλευρές οποιουδούποτε (τυχόντος) παραλληλογράμου είναι ίσες, οπότε:

$B\Gamma = A\Delta$, $B'\Gamma' = A'\Delta'$, $\Delta\Gamma = AB$ και $\Delta'\Gamma' = A'B'$.

Αρα τελικά η πιο πάνω αναλογία προεκτείνεται ως εξής:

$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} \quad \textbf{(1)}$$

Δηλαδή τα δύο παραλλληλόγραμμα έχουν όλες τις πλευρές τους ανάλογες.

- Επίσης επειδή $\hat{\Gamma} = \hat{A}$ και $\hat{\Gamma}' = \hat{A}'$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμων και δεδομένου ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, θα είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Επιπλέον:

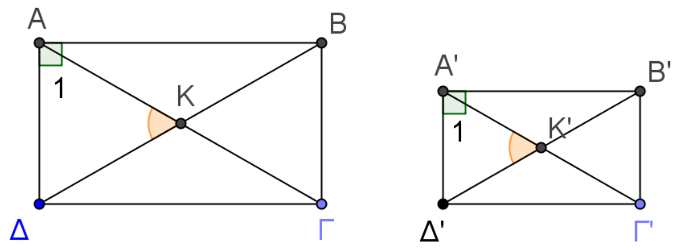
- $\hat{B} = 180° - \hat{A} = 180° - \hat{A}' = \hat{B}'$ (οι $\hat{B}, \hat{A}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ και οι οι $\hat{B}', \hat{A}'$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $A'\Delta'$ και $B'\Gamma'$ που τέμνονται από την $A'B'$)
- $\hat{\Delta} = 180° - \hat{A} = 180° - \hat{A}' = \hat{\Delta}'$ (οι $\hat{\Delta}, \hat{A}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ και οι οι $\hat{\Delta}', \hat{A}'$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $A'B'$ και $\Gamma'\Delta'$ που τέμνονται από την $A'\Delta'$)

Αρα συνολικά:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{\Delta} = \hat{\Delta}' \end{array}\right\} \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** και σύμφωνα με τον ορισμό των όμοιων σχημάτων τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και $Α'Β'Γ'Δ'$ είναι όμοια.

ii)



Το τρίγωνα ΚΑΔ και $Κ'Α'Δ'$ είναι ισοσκελή οπότε οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες και ειδικά:

$$\hat{Α}_1 = \frac{180° - \hat{Κ}}{2} = \frac{180° - \hat{Κ}'}{2} = \hat{Α}'_1$$

Αρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ και $Δ'Α'Γ'$ είναι έχουν:

$$\left.\begin{aligned} \hat{Δ} = \hat{Δ}' = 90° \\ \hat{Α}_1 = \hat{Α}'_1 \end{aligned}\right\}$$ Επομένως είναι όμοια ($1^ο$ κριτήριο ομοιότητας) άρα θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}.$$

Επειδή οι απέναντι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες η αναλογία μπορεί να επεκταθεί ως εξής:

$$\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΔΓ}{Δ'Γ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'}$$

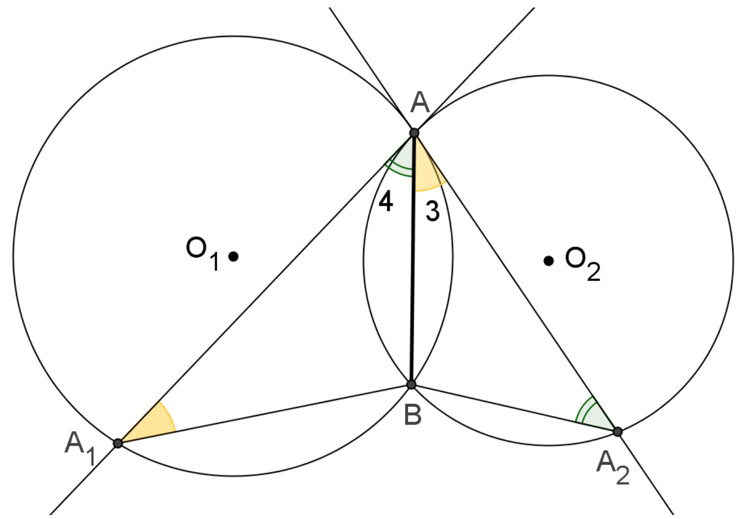
Αρα τα δύο ορθογώνια έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία αφού είναι όλες ορθές και τις πλευρές τους ανάλογες επομένως σύμφωνα με τον ορισμό είναι όμοια.

Α3. Θεωρούμε τους κύκλους $\left(\mathrm{O}_{1,} R_1\right)$ και $\left(\mathrm{O}_{1,} R_2\right)$ που τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν οι εφαπτόμενες στο Α τέμνουν τους κύκλους στα A_1 και A_2 αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BA}_1 \cdot \mathrm{BA}_2$

Λύση:

Τα τρίγωνα ABA_1 και ABA_2 είναι όμοια, γιατί:



$\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3$ ως εγγεγραμμένη και γωνία χορδής και εφαπτομένης που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Επίσης:

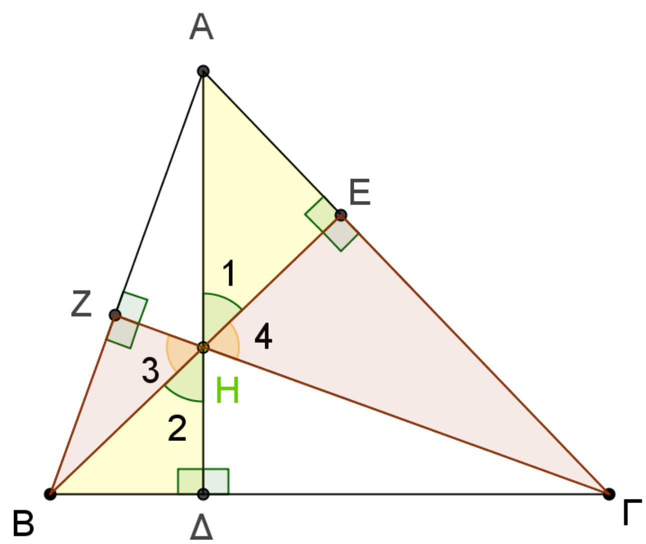
$\hat{\mathrm{A}}_2 = \hat{\mathrm{A}}_4$ ως εγγεγραμμένη και γωνία χορδής και εφαπτομένης που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Αρα τα τρίγωνα είναι όμοια από το $1^{\text{ο}}$ κριτήριο ομοιότητας και επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BA}_2} = \frac{\mathrm{BA}_1}{\mathrm{AB}}\left(= \frac{\mathrm{AA}_1}{\mathrm{AA}_2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BA}_1 \cdot \mathrm{BA}_2$$

Α4. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι τα ύψη και Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι

$$\text{Η}\Delta \bullet \text{ΗΑ} = \text{ΗΒ} \bullet \text{ΗΕ} = \text{Η}\Gamma \bullet \text{ΗΖ}.$$



Λύση:

● Τα τρίγωνα ΗΑΕ και ΗΒΔ είναι όμοια γιατί έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta} = \hat{\text{Ε}} = 90^\circ \\ \hat{\text{Η}}_1 = \hat{\text{Η}}_2 \text{ ως κατακορυφήν}\end{array}\right\}$$

Επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και ειδικά:

$$\frac{\text{Η}\Delta}{\text{ΗΕ}} = \frac{\text{ΗΒ}}{\text{ΗΑ}} \Leftrightarrow \text{Η}\Delta \cdot \text{ΗΑ} = \text{ΗΒ} \cdot \text{ΗΕ} \quad \textbf{(1)}$$

● Τα τρίγωνα ΗΒΖ και ΗΕΓ είναι όμοια γιατί έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\text{Ζ}} = \hat{\text{Ε}} = 90^\circ \\ \hat{\text{Η}}_3 = \hat{\text{Η}}_4 \text{ ως κατακορυφήν}\end{array}\right\}$$

Επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και ειδικά:

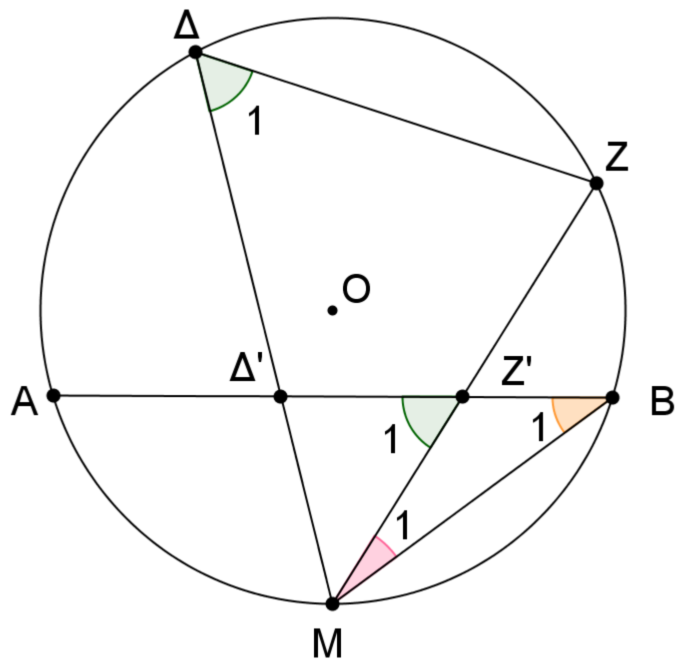
$$\frac{\text{ΗΒ}}{\text{Η}\Gamma} = \frac{\text{ΗΖ}}{\text{ΗΕ}} \Leftrightarrow \text{ΗΒ} \cdot \text{ΗΕ} = \text{Η}\Gamma \cdot \text{ΗΖ} \quad \textbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι $\text{Η}\Delta \cdot \text{ΗΑ} = \text{ΗΒ} \cdot \text{ΗΕ} = \text{Η}\Gamma \cdot \text{ΗΖ}$

Α5. Από το μέσο Μ του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ φέρουμε τις χορδές ΜΔ και ΜΖ που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα Δ' και Z' αντίστοιχα.Να αποδειχθεί ότι:

$\text{ΜΔ} \cdot \text{ΜΔ}' = \text{ΜΖ} \cdot \text{ΜΖ}'$

Λύση:



Σκεπτικό: Από τα τμήματα που συμμετέχουν στην προς απόδειξη σχέση σκεφτόμαστε να εξετάσουμε αν τα τρίγωνα ΜΔΖ και $\text{ΜΔ}'\text{Ζ}'$ είναι όμοια.

Φέρνουμε το τμήμα ΔΖ.Τότε τα τρίγωνα έχουν:

- $\hat{\text{Μ}}$ κοινή.
- Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ του τριγώνου ΜΔΖ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο επομένως το μέτρο της είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της: $\hat{\Delta}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{\text{ΜΖ}}}{2}$

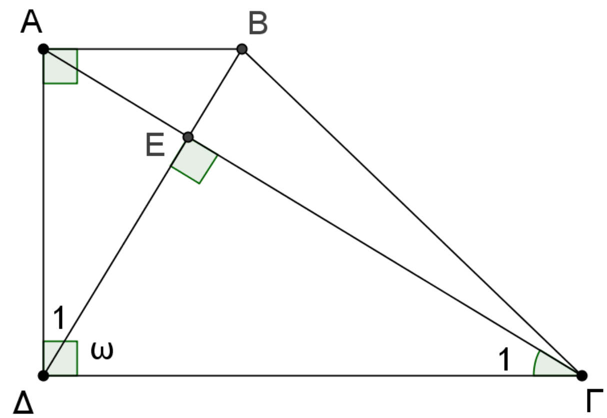
Η γωνία $\hat{Z}_1'$ του τριγώνου $\text{ΜΔ}'\text{Ζ}'$ **δεν** είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και έτσι θα προσπαθήσουμε να την συνδέσουμε με εγγεγραμμένες ως εξής: Φέρνουμε την χορδή ΜΒ. Η γωνία $\hat{Z}_1'$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\text{Ζ}'\text{ΜΒ}$ επομένως είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών $\hat{Z}_1' = \hat{\text{Μ}}_1 + \hat{\text{Β}}_1$

Αρα $\hat{Z}_1' = \hat{\text{Μ}}_1 + \hat{\text{Β}}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{\text{ΒΖ}}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{\text{ΜΑ}}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{\text{ΒΖ}}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{\text{ΜΒ}}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{\text{ΜΖ}}}{2} = \hat{\Delta}_1$

Αρα τα τρίγωνα ΜΔΖ και $\text{ΜΔ}'\text{Ζ}'$ *(από το 1ο κριτήριο ομοιότητας)* είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Α6. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A}=\hat{\Delta}=1\llcorner$) οι διαγώνιοι είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι μέσο ανάλογο των βάσεων.

Λύση:



Επειδή το ύψος είναι το ΑΔ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Delta}$$

▪ Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΔ ισχύει:

$\hat{\Gamma}_1=90°-\omega$ (1)

▪ Επίσης $\hat{\Delta}_1+\omega=90° \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1=90°-\omega$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι: $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΑΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{\Delta}=90° \\ \hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1\end{array}\right\}$$ Αρα από 1^{ο} κριτήριο ομοιότητας είναι όμοια οπότε οι πλευρές τους είναι ανάλογες:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Delta}\left(=\frac{\Delta B}{A\Gamma}\right)$$