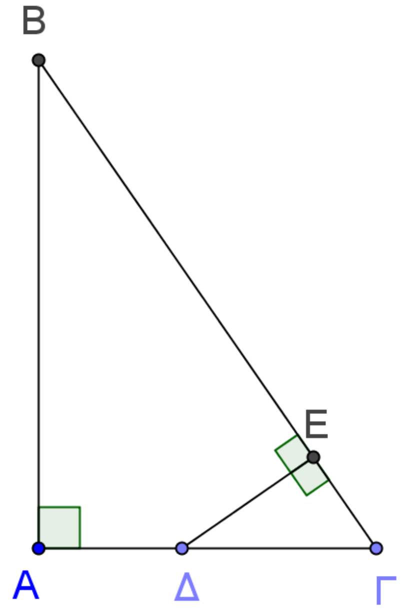
8 Ασκήσεις Εμπέδωσης (Version 1-9-2015)

Ε1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 1∟). Από τυχαίο σημείο Δ της ΑΓ φέρουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια,

ii) $\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{E\Delta}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{E\Gamma}$.



Λύση:

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{E}}=90^\circ\\ \hat{\Gamma}\ \text{κοινή}\end{array}\right\}$$ Αρα σύμφωνα με το 1^{o} κριτήριο ομοιότητας είναι

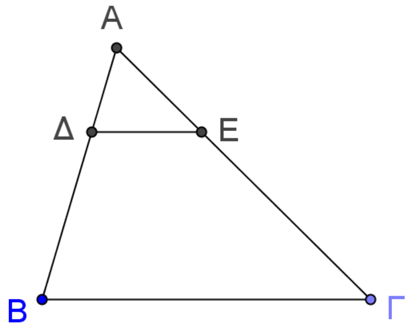
όμοια, οπότε θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}}\Leftrightarrow\mathrm{A\Gamma}\cdot\Delta\mathrm{E}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{E\Gamma}$$

Ε2. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = $\frac{1}{3}$ΑΒ και ΓΕ = $\frac{2}{3}$ ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια,

ii) ΒΓ = 3ΔΕ



Λύση:

Εχουμε: $\mathrm{A\Delta}=\frac{1}{3}\mathrm{AB}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}$ **(1)** και.

Επίσης: $\Gamma\mathrm{E}=\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AE}=\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow-\mathrm{AE}=\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow\mathrm{AE}=\mathrm{A\Gamma}-\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow$

$\mathrm{AE}=\frac{3}{3}\mathrm{A\Gamma}-\frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{3}$ **(2)**

Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι: $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{3}$

Αρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ *(που περιέχεται στις πλευρές αυτές)* κοινή, οπότε σύμφωνα με το 2$^{\text{ο}}$ κριτήριο ομοιότητας είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.Επομένως όλες οι πλευρές τους είναι ανάλογες οπότε και $\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\mathrm{B\Gamma}=3\Delta\mathrm{E}$.

<u>Σημείωση:</u> Είναι από τις σπάνιες ασκήσεις που χρησιμοποιείται το 2$^{\text{ο}}$ κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Ε3. Μία μεταλλική πλάκα έχει σχήμα ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές α,β,γ. Η πλάκα θερμαίνεται και από τη διαστολή αυξάνεται κάθε πλευρά της κατά το $\frac{1}{15}$ της. Θα παραμείνει ορθογώνιο τρίγωνο το σχήμα της πλάκας;

Λύση:

Αν α', β' και γ' είναι οι πλευρές μετά την διαστολή, απο την εκφώνηση προκύπτει ότι

$$\alpha' = \alpha + \frac{1}{15}\alpha \Leftrightarrow \alpha' = \frac{15}{15}\alpha + \frac{1}{15}\alpha \Leftrightarrow \alpha' = \frac{16}{15}\alpha$$

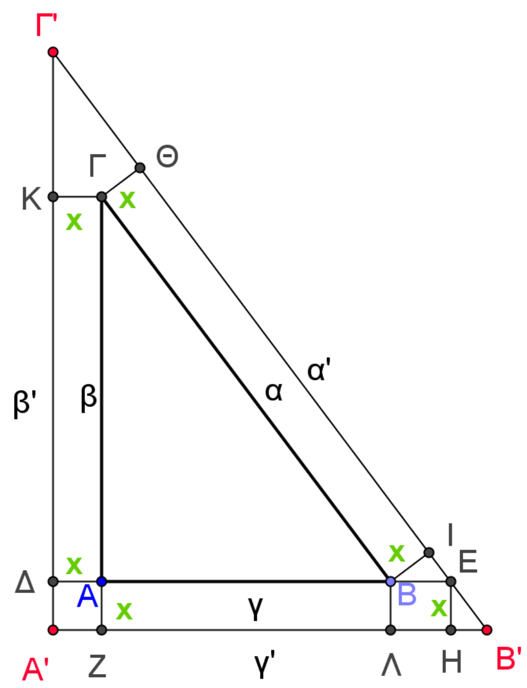
$$\beta' = \beta + \frac{1}{15}\beta \Leftrightarrow \beta' = \frac{15}{15}\beta + \frac{1}{15}\beta \Leftrightarrow \beta' = \frac{16}{15}\beta$$

$$\gamma' = \gamma + \frac{1}{15}\gamma \Leftrightarrow \gamma' = \frac{15}{15}\gamma + \frac{1}{15}\gamma \Leftrightarrow \gamma' = \frac{16}{15}\gamma$$

Αρα $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma}\left(= \frac{16}{15}\right)$

Τα δύο τρίγωνα έχουν λοιπόν τις πλευρές τους ανάλογες οπότε σύμφωνα με το 3^{o} κριτήριο ομοιότητας είναι όμοια.Επομένως θα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίοες και αν υποθέσουμε ότι α είναι η υποτείνουσα του αρχικού τριγώνου θα είναι $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$, οπότε και $\hat{\mathrm{A}}' = 90^\circ$ δηλαδή το τρίγωνο μετά την διαστολή παραμένει ορθογώνιο.

Σημείωση: Μιας και το βιβλίο δεν έχει σχήμα προσπάθησα να προσθέσω ένα.Αυτή η ιδέα είχε το θετικό να αναρωτηθώ για πρώτη φορά! πως ακριβώς θα γινόταν η σχεδίαση.Είναι εύλογο (αν και δεν είμαι σίγουρος αν υποστηρίζεται από την πραγματικότητα) ότι οι πλευρές του διασταλμένου τριγώνου θα απέχουν σταθερή απόσταση έστω x από τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.Θέλησα να υπολογίσω αυτή την σταθερή απόσταση συναρτήσει των πλευρών α, β,γ. (με λ συμβολίζω το συντελεστή αύξησης των πλευρών (το αντίστοιχο του $\frac{1}{15}$ της άσκησης)



$$\mathrm{A'Z} + \mathrm{Z\Lambda} + \mathrm{\Lambda H} + \mathrm{HB'} = \mathrm{A'B'} \Leftrightarrow x + \gamma + \frac{x}{\eta\mu\mathrm{B}} + \frac{x}{\varepsilon\varphi\mathrm{B}} = \gamma'$$

$$x+\gamma+\frac{x}{\eta\mu\mathrm{B}}+\frac{x}{\varepsilon\varphi\mathrm{B}}=\gamma+\lambda\gamma\Leftrightarrow x+\frac{x}{\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{x}{\frac{\beta}{\gamma}}=\lambda\gamma\Leftrightarrow x+\frac{\alpha x}{\beta}+\frac{\gamma x}{\beta}=\lambda\gamma$$

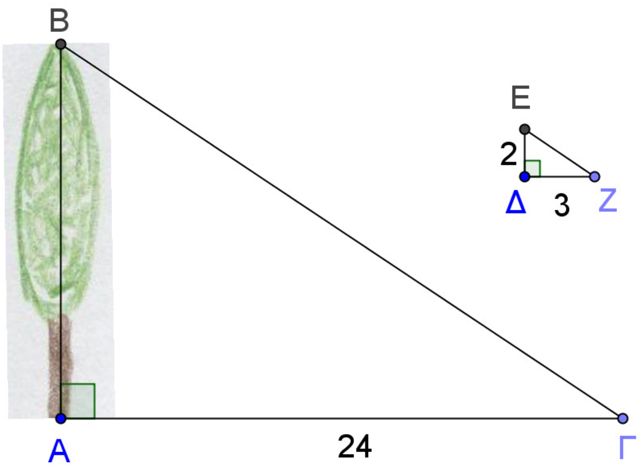
$$\Leftrightarrow x\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)=\lambda\gamma\Leftrightarrow x\left(\frac{\beta}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\beta}\right)=\lambda\gamma\Leftrightarrow x\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}\right)=\lambda\gamma\Leftrightarrow x=\frac{\lambda\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Αναρωτιέμαι πως λύνεται το ίδιο πρόβλημα για τυχαίο τρίγωνο (όχι ορθογώνιο).

Αν μετακινήσουμε το διασταλμένο τρίγωνο ώστε οι πλευρές του να διατηρούνται παράλληλες με αυτές του αρχικού τότε πάλι τα τρίγωνα είναι όμοια.Αρα το σχήμα θα μπορούσε να είναι διαφορετικό και οι αποστάσεις των πλευρών του διασταλμένου τριγώνου από αυτές του αρχικού να μην είναι ίσες. Απλά όπως είπα και πιο πάνω θεώρησα ότι το πιο εύλογο είναι να θεωρήσω ότι είναι ίδιες.

Ε4. Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά μήκους 24m. Στο ίδιο σημείο, την ίδια στιγμή, μια κατακόρυφη ράβδος μήκους 2m ρίχνει σκιά μήκους 3m. Να βρεθεί το ύψος του δέντρου.

Λύση:



Λέγεται ότι ο Θαλής ο Μιλήσιος μέτρησε με την μέθοδο αυτή το ύψος των πυραμίδων στην Αίγυπτο από την σκιά τους

Το πιο σημαντικό το πιο καίριο σημείο της μεθόδου είνα η παραδοχή ότι η ακτίνες του Ηλίου λόγω της τεράστιας απόστασής του από την Γή είναι παράλληλες.

- Η ακτίνα του ήλιου, το ύψος ΑΒ και η σκιά ΑΓ του δέντρου σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}}=90°$)
- Το ίδιο ισχύει για την ακτίνα του ήλιου ΕΖ, τη ράβδο ΔΕ και τη σκιά της ΔΖ.

Επειδή τόσο οι κατακόρυφες ΑΒ και ΔΕ όσο και οι ακτίνες του ήλιου ΒΓ και ΕΖ είναι παράλληλες θα είναι $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{E}}$ *(οξείες γωνίες με παράλληλες πλευρές §4.4)* Αρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια, οπότε $\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}=\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\mathrm{Z}}$.Με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε

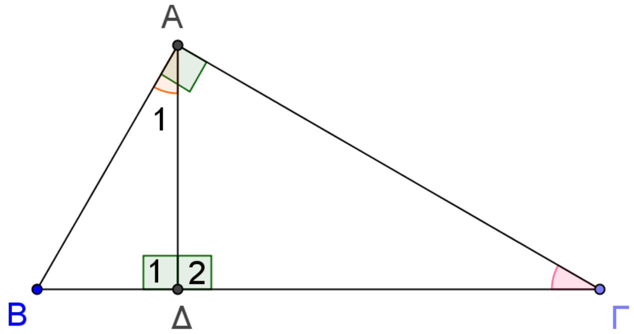
$$\frac{\mathrm{AB}}{2m}=\frac{24m}{3m}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{AB}}{2m}=8\Leftrightarrow\mathrm{AB}=16\ m$$

Ε5. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι :

i) $\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{\Delta B}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$,

ii) $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}$,

iii) $\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}$.



Λύση:

i) Τα τρίγωνα ΔΒΑ και ΔΑΓ έχουν:

- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$
- $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}}_1$ ως συμπληρωματικές της $\hat{\mathrm{B}}$ (ή ως οξείες με πλευρές κάθετες)

Αρα σύμφωνα με το 1ο κριτήριο ομοιότητας είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma} = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\mathrm{A\Delta}} \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta}^2 = \Delta\mathrm{B}\cdot\Delta\Gamma$$

ii) και **iii)** Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουν:

$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{A}} = 90° \\ \hat{\mathrm{B}} \text{ κοινή}\end{array}\right\}$ Αρα σύμφωνα με το 1ο κριτήριο ομοιότητας είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Gamma}} \text{ οπότε}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow \mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma}$$

Σημείωση: Τα ερώτημα i) είναι το Θεώρημα IV §9.2 και το ερώτημα ii) είναι το Θεώρημα I §9.2.

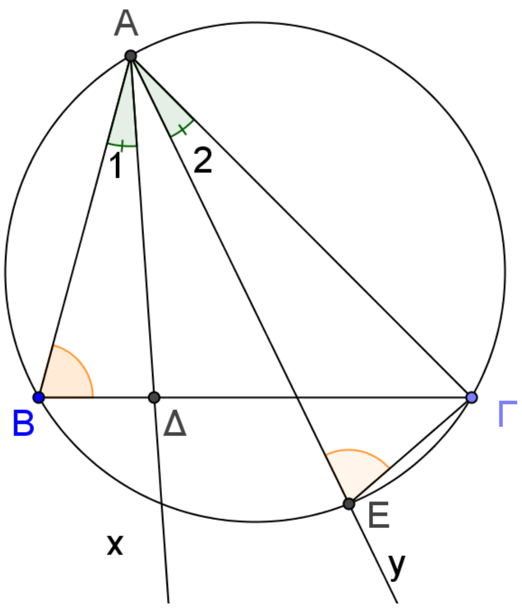
Ε6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και οι ευθείες Αx και Αy που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις ΑΒ και ΑΓ.

Η Αx τέμνει την ΒΓ στα Δ και η Αy τέμνει τον κύκλο στο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

$\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AE}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}$

Λύση:



Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ έχουν:

- $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ εκ κατασκευής (έτσι σχεδιάστηκαν σύμφωνα με τα δεδομένα)
- $\hat{B}=\hat{E}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο

Αρα σύμφωνα με το 1ο κριτήριο ομοιότητας είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}\left(=\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{E\Gamma}}\right)\Leftrightarrow \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AE}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}$$

__Παρατήρηση:__ Το ερώτημα i) της άσκηση Σ5 είναι ειδική περίπτωση της άσκησης αυτής για $\hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{\hat{A}}{2}$