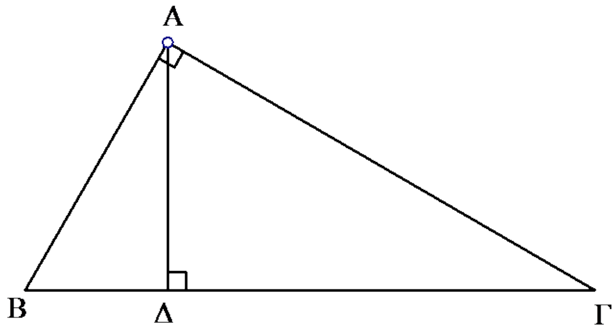
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Παρουσίασα τις αποδείξεις κάπως αναλυτικά ώστε να γίνουν πιο κατανοητές.Εσείς μπορείτε να τις παρουσιάσετε πιο λιτά.

►Δίνεται τυχόν ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A}=1\llcorner=1$ ορθή) και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα.Να δειχτεί ότι ισχύει:

i) $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ *(Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.Θεώρημα Ι σ 183)*

ii) $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

iii) $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα) *(Θεώρημα ΙΙ σ.183)*



i) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^O$ και $\hat{B}$ κοινή (1^o κριτήριο ομοιότητας).Επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες **:**

$$\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{AB}{B\Delta} = \left(\frac{A\Gamma}{A\Delta}\right)$$

Παίρνουμε τους δύο πρώτους όρους της πιο πάνω αναλογίας και κάνουμε «χιαστί».

$$\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{AB}{B\Delta} \Leftrightarrow AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \quad \textbf{(1)}$$

ii) Παρόμοια από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ (έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^O$ και $\hat{\Gamma}$ κοινή) παίρνουμε:

$$\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \quad \textbf{(2)}$$

iii) Με πρόσθεση των ισοτήτων **(1)** και **(2)** κατά μέλη έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = B\Gamma \cdot (B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2$$

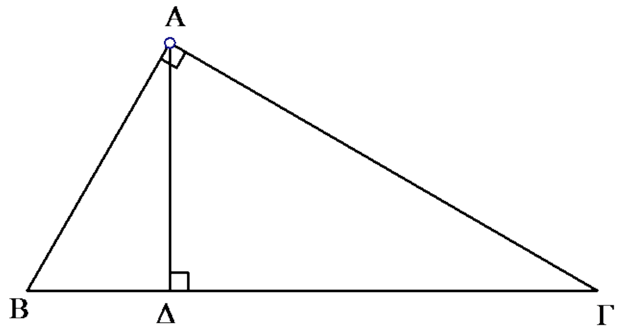
Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Δίνεται τυχόν ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα. Τότε ισχύουν:

Θεώρημα Ι (σ 183)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.



$$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$$

$$ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$$

Θεώρημα ΙΙ (Πυθαγόρειο) (σ.183)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$$

Θεώρημα IV (σ. 184)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

$$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$$

Θεώρημα Ι σ.189

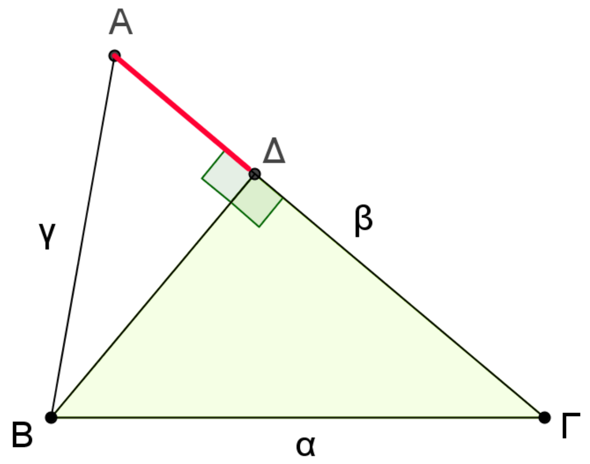
Το **τετράγωνο** πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από **οξεία** γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών του, <u>ελαττωμένο</u> κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\mathrm{A}} < 90°$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στην β, τότε ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$$

Απόδειξη:

Φέρνουμε το ύψος ΒΔ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\alpha^2 = \Delta\mathrm{B}^2 + \Delta\Gamma^2 \qquad (1)$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\Delta\mathrm{B}^2 = \gamma^2 - \mathrm{A\Delta}^2 \qquad (2)$$

Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$\alpha^2 = \gamma^2 - \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\Gamma^2 \qquad (3)$$

Στο σχήμα μας (με $\hat{\mathrm{A}} < 90°$ και $\hat{\Gamma} < 90°$) το Δ βρίσκεται μεταξύ των Α και Γ

$$\Delta\Gamma = \beta - \mathrm{A\Delta}$$

Με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$\alpha^2 = \gamma^2 - \mathrm{A\Delta}^2 + (\beta - \mathrm{A\Delta})^2 = \gamma^2 \cancel{- \mathrm{A\Delta}^2} + \beta^2 - 2\beta\mathrm{A\Delta} \cancel{+ \mathrm{A\Delta}^2} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}.$$

<u>Σημείωση για την απόδειξη:</u>

Τι πιο λογικό να ξεκινήσουμε από μια σχέση που να μας δίνει το α^2

Οπότε γράφουμε την $\alpha^2 = \Delta\mathrm{B}^2 + \Delta\Gamma^2$

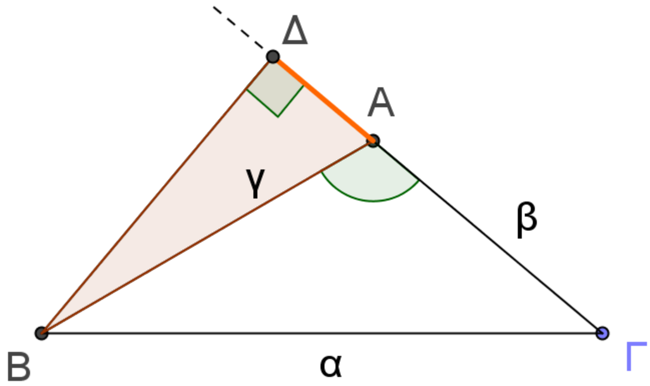
Τώρα έχοντας στο μυαλό μας ότι πρέπει να φτάσουμε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$ καταλαβαίνω ότι πρέπει το ΔΒ να αντικατασταθεί οπότε σκέφτομαι να εφαρμόσω Πυθαγόρειο στο ΔΒΑ και επίσης ούτε το ΔΓ εμφανίζεται στον τελικό τύπο αλλά εμφανίζεται το ΑΔ και το β οπότε καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να αντικαταστήσουμε και το $\Delta\Gamma = \beta - \mathrm{A\Delta}$

Θεώρημα ΙΙ *(σ.190 σχολικού)*

Το **τετράγωνο** πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των **τετραγώνων** των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Απόδειξη:

Φέρνουμε το ύψος ΒΔ.



- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$\alpha^2 = \mathrm{\Delta B}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2$ (1)

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$\mathrm{\Delta B}^2 = \gamma^2 - \mathrm{A\Delta}^2$ (2)

- Η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$\alpha^2 = \gamma^2 - \mathrm{A\Delta}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2$ (3)

- Επειδή $\hat{\mathrm{A}} > 90°$, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως:

$\mathrm{\Delta\Gamma} = \beta + \mathrm{A\Delta}$

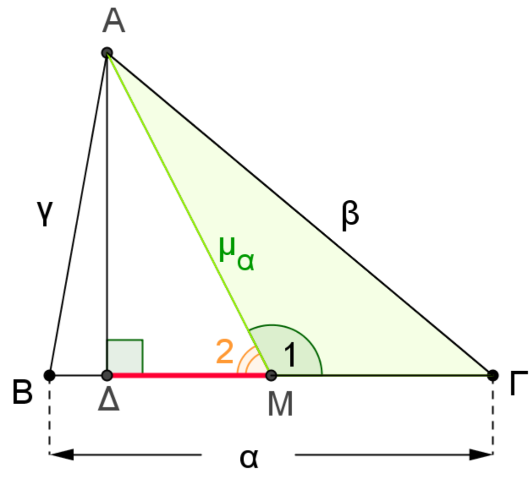
- Με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$\alpha^2 = \gamma^2 - \mathrm{A\Delta}^2 + (\beta + \mathrm{A\Delta})^2 = \gamma^2 \cancel{- \mathrm{A\Delta}^2} + \beta^2 + 2\beta\mathrm{A\Delta} \cancel{+ \mathrm{A\Delta}^2} = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$.

Θεώρημα Ι (1ο Θεώρημα Διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη



Εστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ>ΑΒ.

Παίρνουμε το μέσο Μ του ΒΓ και φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ.

Επίσης φέρνουμε και το ύψος ΑΔ. *(το Δ είναι η προβολή του Α πάνω στην ΒΓ)*

- Στο σχήμα μας η γωνία $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι αμβλεία, οπότε από το θεώρημα αμβλείας γωνίας *(ΘΙΙ Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος)*

$$\beta^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2 + 2\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{M\Delta} \qquad \mathbf{(1)}$$

(ΜΔ είναι η προβολή της ΑΜ πάνω στην ΜΓ)

- Στο σχήμα μας η γωνία $\hat{\mathrm{M}}_2$ είναι οξεία, οπότε από το θεώρημα οξείας γωνίας (ΘΙ Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος)

$$\gamma^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MB}^2 - 2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Delta} \qquad \mathbf{(2)}$$

(ΜΔ είναι η προβολή της ΑΜ πάνω στην ΜΒ)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις **(1)** και **(2)** και λαμβάνοντας υπόψη ότι ΜΒ=ΜΓ (αφού Μ μέσο ΒΓ) παίρνουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2 \cancel{+2\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{M\Delta}} + \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MB}^2 \cancel{-2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Delta}} \overset{\mathrm{M\Gamma=MB}}{\Leftrightarrow}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mathrm{AM}^2 + 2\mathrm{MB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mathrm{AM}^2 + 2\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mathrm{AM}^2 + 2\frac{\mathrm{B\Gamma}^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mathrm{AM}^2 + \frac{\mathrm{B\Gamma}^2}{2}$$

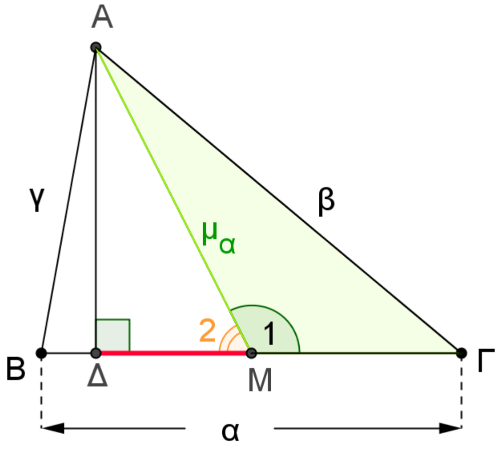
$$\beta^2 + \gamma^2 = 2{\mu_\alpha}^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Θεώρημα ΙΙ (2ο Θεώρημα Διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Απόδειξη:



Εστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ>ΑΒ.

Παίρνουμε το μέσο Μ του ΒΓ και φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ.

Επίσης φέρνουμε και το ύψος ΑΔ. *(το Δ είναι η προβολή του Α πάνω στην ΒΓ)*

- Στο σχήμα μας η γωνία $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι αμβλεία, οπότε από το θεώρημα αμβλείας γωνίας *(ΘΙΙ Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος)*

$\beta^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{M\Gamma}^2 + 2\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{M\Delta}$ **(1)** *(ΜΔ είναι η προβολή της ΑΜ πάνω στην ΜΓ)*

- Στο σχήμα μας η γωνία $\hat{\mathrm{M}}_2$ είναι οξεία, οπότε από το θεώρημα οξείας γωνίας (ΘΙ Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος)

$\gamma^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MB}^2 - 2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Delta}$ **(2)** *(ΜΔ είναι η προβολή της ΑΜ πάνω στην ΜΒ)*

<u>**Αφαιρούμε**</u> κατά μέλη τις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι ΜΒ=ΜΓ (αφού Μ μέσο ΒΓ) παίρνουμε

$$\beta^2 - \gamma^2 = \cancel{\mathrm{AM}^2} + \mathrm{M\Gamma}^2 + 2\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{M\Delta} - \cancel{\mathrm{AM}^2} - \mathrm{MB}^2 + 2\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Delta} \overset{\mathrm{M\Gamma=MB}}{\Leftrightarrow}$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 4\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 4\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}\cdot\mathrm{M\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{M\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\cdot\mathrm{M\Delta} \Leftrightarrow$$