Παράγωγος της συνάρτησης f στο $x=x_0$ ΛΥΣΕΙΣ *(15-10-2016)*

Ορισμός

Μια συνάρτηση *f* λέμε είναι **παραγωγίσιμη στο σημείο x_0** *του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το*

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *και είναι πραγματικός αριθμός.*

▪ *Το όριο αυτό ονομάζεται* ***παράγωγος της f στο x_0*** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Παράδειγμα:

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x^2$ *στο σημείο 4 δηλαδή το* $f'(4)$.

● Βρίσκουμε την διαφορά $f(4+h)-f(4)$:

$$f(4+h)-f(4)=(4+h)^2-4^2=\cancel{4^2}+2\cdot 4h+h^2-\cancel{4^2}=8h+h^2=h(8+h)$$

● Για $h\neq 0$ *βρίσκουμε το πηλίκο* $\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$:

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{h(8+h)}{h}=8+h$$

● Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}(8+h)=8$$

Παρόμοια θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα $f'(1)$, $f'(2)$, αλλά και $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ κ.λ.π.

► Για να αποφύγουμε τον κόπο και τον χρόνο να κάνουμε τον ίδιο υπολογισμό σε κάθε σημείο σκεφτόμαστε να υπολογίσουμε γενικά το $f'(x)$ *για ένα τυχαίο σημείο* x:

● Βρίσκουμε την διαφορά $f(x+h)-f(x)$:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=\cancel{x^2}+2\cdot xh+h^2-\cancel{x^2}=2xh+h^2=h(2x+h)$$

● Για $h\neq 0$ *βρίσκουμε το πηλίκο* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

● Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Αρα $f'(x)=2x$

και πλέον μπορώ να υπολογίσω το $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ κλπ. με απλή αντικατάσταση στον πιο πάνω τύπο.

$f'(1)=2\cdot 1=2$ $\qquad f'(2)=2\cdot 2=4$

$f'(3)=2\cdot 3=6$ $\qquad f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x^3$ σε ένα τυχαίο σημείο x του πεδίου ορισμού της και μετά να βρείτε τα $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

- Βρίσκουμε την διαφορά $f(x+h)-f(x)$:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3=\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}=3x^2h+3xh^2+h^3=h\left(3x^2+3xh+h^2\right)$$

- Για $h\neq 0$ *βρίσκουμε το πηλίκο* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2+3x0+0^2=3x^2$$

$f'(1)=3\cdot 1^2=3$

$f'(2)=3\cdot 2^2=12$

$f'(3)=3\cdot 3^2=3\cdot 9=27$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ) -ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

► Εστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και Β το το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη (προφανώς $B\subseteq A$) Αν σε κάθε $x\in B$ αντιστοιχίσουμε την παράγωγο $f'(x)$ στο σημείο αυτό, ορίζεται μια νέα συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) **της** $\boldsymbol{f}$ και συμβολίζεται με f'.

►Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr *peira.gr*