ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ

- Με N(A) συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου.

  Για παράδειγμα αν A={1,2,5} τότε N(A)=3

- **Κλασικός ορισμός της πιθανότητας**

  Για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει:

  Πιθανότητα ενδεχομένου A=$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοικών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$

- $P(\Omega)=1$

- $P(\varnothing)=0$

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως **"κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων"**. Οι κανόνες αυτοί θα αποδειχθούν στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύουν και στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

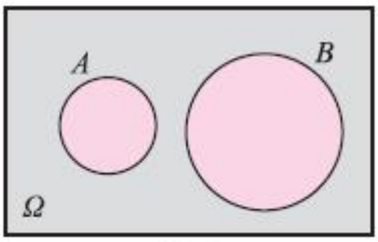
1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Αφού τα A και B ασυμβίβαστα *(δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο)* θα ισχύει

$N(A\cup B)= N(A)+N(B)$ **(1)**



$A\cup B$

Διαιρώντας τα μέλη της **(1)** με N(Ω) έχουμε:

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως *(από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι **ανά δύο** ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$.

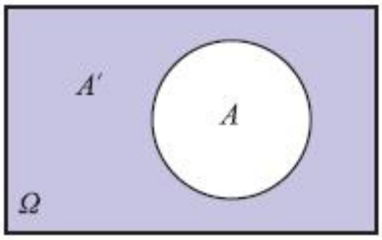
2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' ισχύει:

P(A')=1 - P(A)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού τα ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά ισχύει $A \cup A' = \Omega$

Επειδή Α∩Α'=∅, δηλαδή τα Α και Α' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:



P(A∪A')=P(A)+P(A')

P(Ω)=P(A)+P(A')

1=P(A)+P(A').

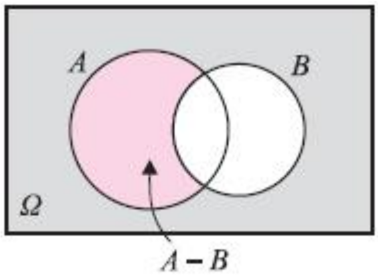
Οπότε P(A')=1-P(A).

5. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

P(A-B)=P(A)-P(A∩B)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα Α-Β και Α∩Β είναι ασυμβίβαστα και



A= (A-B)∪(A∩B), έχουμε από τον απλό προσθετικό νόμο:

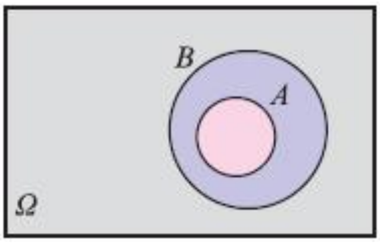
P(A)=P[(A-B)∪(A∩B)] = P(A-B)+P(A∩B)

Άρα P(A-B)=P(A)-P(A∩B)

4. Αν A⊆B, τότε P(A)≤P(B)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή A⊆B προφανώς ισχύει:



$N(A) \leq N(B)$ *διαιρούμε κατά μέλη με N(Ω)>0*

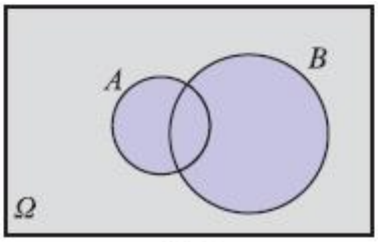
$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$ *κλασικός ορισμός πιθανότητας*

$P(A) \leq P(B)$

3. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>



$A \cup B$

Για δυο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε

$N(A \cup B)=N(A)+N(B)-N(A \cap B)$, **(1)**

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της **(1)** με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως *(από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)*

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

<u>Παρατήρηση</u> Ο απλός προσθετικός νόμος είναι ειδική περίπτωση του προσθετικού νόμου, αφού όταν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα *(ή ξένα ή αμοιβαίως αποκλειόμενα)* δηλαδή όταν:

$A \cap B=\varnothing$ έχουμε : $P(A \cap B)=P(\varnothing)=0$

Οπότε ο προσθετικός νόμος γίνεται διαδοχικά

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-0$

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ δηλαδή ο απλός προσθετικός νόμος.

<u>Σημείωση</u>: Στην παρουσίαση έχω αλλάξει την σειρά των ιδιοτήτων σε σχέση με το βιβλίο κρατώντας όμως την αρίθμηση του βιβλίου. Τις δύο ιδιότητες που αποδεικνύονται με χρήση του απλού Προσθετικού νόμου τις έχω τοποθετήσει κάτω από τον Προσθετικό νόμο.

Επίσης έχω κάνει και μερικές προσθαφαιρέσεις που πιστεύω βελτιώνουν (έστω «στα σημεία») την παρουσίαση, κάνοντάς την *πιο ομοιόμορφη, πιο κατανοητή και κατά συνέπεια πιο εύληπτη.*