Τα παρακάτω θέματα ευγενικά μας παραχώρησε ο συνάδελφος Μπουμπουλής Κώστας.

Για ευκολία πρόσθεσα και τις λύσεις.Κάθε υπόδειξη βελτίωσης ευπρόσδεκτη.

Σχολικό έτος 2012- 13

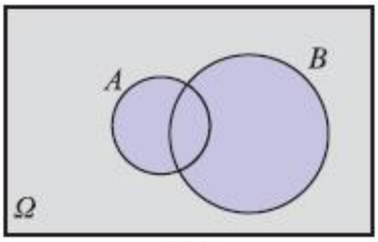
ΘΕΜΑ $1^{\text{ο}}$

Α. i) Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

(Μονάδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για δυο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε:



$A\cup B$

$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$, (1)

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως (από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας):

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως προσθετικός νόμος (additive law).

ii) Ποιος είναι ο κλασσικός ορισμός πιθανότητας;

(Μονάδες 5)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας:

Για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει:

Πιθανότητα ενδεχομένου Α = $P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοικών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}}$

Β. Βρείτε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες και σημειώστε Σ ή Λ αντίστοιχα δίπλα στον αριθμό της καθεμιάς.

1. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
2. Για δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g ισχύει: $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$
3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
4. Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ αντίστοιχα, η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση: $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i$
5. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A΄ ισχύει $P(A) = 1 - P(A')$

(Μονάδες 10)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1→ Σ

2→ Λ

3 →Λ

4→ Σ

5 →Σ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f. (Μονάδες 5)

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 15)

γ) Να βρεθούν τα ακρότατα της f. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) $f'(x) = \left(2x^3 - 3x^2 - 12x + 6\right)' = 2\cdot 3x^2 - 3\cdot 2x - 12\cdot 1 + 0 = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right)$

Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 - x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\alpha=1$, $\beta=-1$ $\gamma=-2$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$

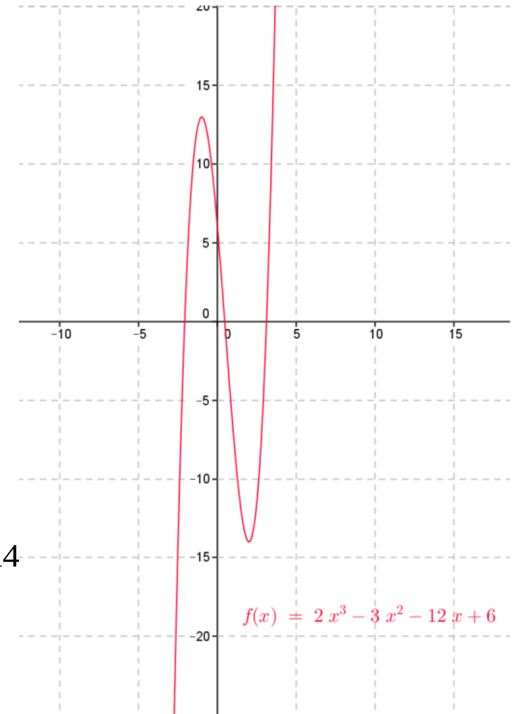
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Σχηματίζουμε πινακάκι όπου φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου.Επειδή 6>0 το πρόσημο της παραγώγου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ που από την Α Λυκείου γνωρίζουμε ότι έξω από τις ρίζες γίνεται ομόσημο του α=1, δηλαδή θετικό και ανάμεσα στις ρίζες ετερόσημο του α=1, δηλαδή αρνητικό.

x	-∞		-1		2		∞
$f'(x) = 6\left(x^2 - x - 2\right)$		+	0	-	0	+	
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$		↗		↘		↗	

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$
- Γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 2]$
- Γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$



γ) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=-1 το οποίο είναι ίσο με:

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 6 = -2 - 3 + 12 + 6 = 13$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=2 το οποίο είναι ίσο με:

$f(2) = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 6 = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 - 24 + 6 = 16 - 12 - 24 + 6 = -14$

ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνεται ο πίνακας:

x_i	v_i	f_i %	N_i	$x_i v_i$
1	15			
2	10			
3	15			
4	10			
Σύνολο				

α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογιστεί η διάμεσος. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

x_i	v_i	f_i %	N_i	$x_i v_i$
1	15	30	15	15
2	10	20	25	20
3	15	30	40	45
4	10	20	50	40
Σύνολο	**50**	**100**		**120**

v=15+10+15+10=50

Γνωρίζουμε ότι :

$$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu}\cdot 100 = \frac{15}{50}\cdot 100 = 30$$

$$f_2\% = \frac{\nu_2}{\nu}\cdot 100 = \frac{10}{50}\cdot 100 = 20$$

$$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu}\cdot 100 = \frac{15}{50}\cdot 100 = 30$$

$$f_4\% = \frac{\nu_4}{\nu}\cdot 100 = \frac{10}{50}\cdot 100 = 20$$

$$N_1 = v_1 = 15$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 15 + 10 = 25$$

$$N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 15 + 10 + 15 = 40$$

$$N_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 15 + 10 = 50$$

β) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{120}{50} = 2,4$

γ) Εχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων που είναι διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά επομένως η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. (σχολικό σ.87)

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 50 η δύο μεσαίες είναι η $\dfrac{50}{2} = 25^{\eta}$ και η επόμενη δηλαδή η 26^{η}.

Η 25^{η} παρατήρηση είναι 2 και η 26^{η} είναι 3 επομένως :

Διάμεσος= $\dfrac{2+3}{2} = 2,5$

ΘΕΜΑ 4^ο^

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα *Α* και Β ενός δειγματικού χώρου *Ω* με $P(A) = \dfrac{2}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$ και $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

α) $A \cap B$ (Μονάδες 5)

β) *Α*- Β (Μονάδες 8)

γ) Να πραγματοποιηθεί μόνο το Β. (Μονάδες 7)

δ) Να μην πραγματοποιηθεί το *Α*. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) Από τον προσθετικό νόμο έχουμε διαδοχικά:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} = \frac{5}{12}$$

β) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{8}{12} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

γ) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{6}{12} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{1}{12}$

δ) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$