ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΕΛΕΤΗΣ 2015-16

►Πότε μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της?

Απάντηση:

Μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

► Να δώσετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της

Απάντηση:

Παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της, ονομάζεται το όριο

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ αν

i) υπάρχει και

ii) είναι πραγματικός αριθμός

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται «έφ τονούμενο του x_0”

Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

► Για την συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-7)$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τον άξονα x’x.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τον άξονα των y’y.

γ) Για ποιά x η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x’x.

Απάντηση:

Θέτουμε αρχικά για διευκόλυνση $f(x)=y$ οπότε έχουμε:

$y=(x-3)(x-7)$.

α) Αφού τα σημεία του άξονα x’x έχουν y=0, θέτουμε y=0 και λύνουμε ως προς x:

$0=(x-3)(x-7) \Leftrightarrow (x-3)(x-7)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \text{ ή } x-7=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=7$

Αρα υπάρχουν δύο σημεία τομής που έχουν συντεταγμένες (3,0) και (7,0)

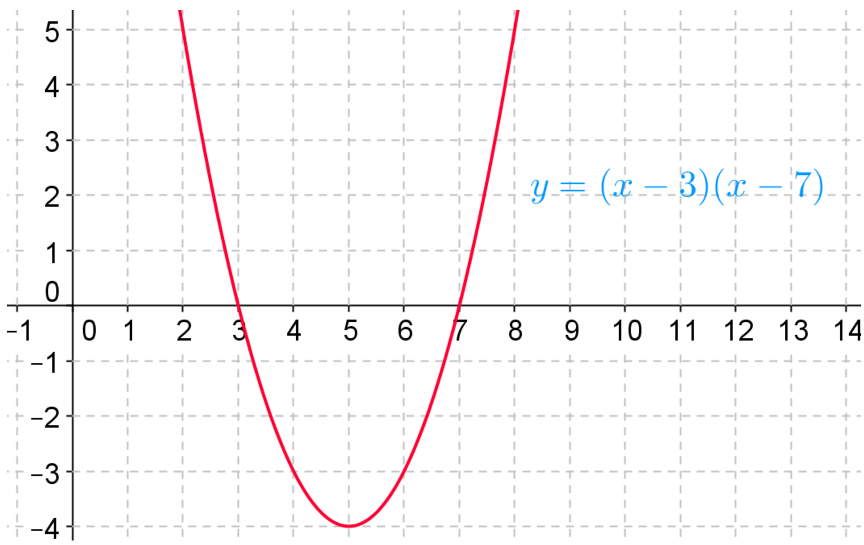
β) Γνωρίζουμε ότι τα σημεία του άξονα y’y έχουν x= 0.Αρα βάζοντας όπου x=0 βρίσκουμε

$y=(0-3)(0-7)=(-3)(-7)=21$

Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα y’y είναι το (0, 21).

Σημείωση: Από τον ορισμό της συνάρτησης μπορεί να υπάρχει το πολύ ένα σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των y.

γ) Κάτω από τον άξονα των x βρίσκονται τα αρνητικά y=f(x).Επομένως πρέπει να βρούμε τα x για τα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές δηλαδή να λύσουμε την ανίσωση:



$f(x)<0 \Leftrightarrow (x-3)(x-7)<0 \Leftrightarrow 3<x<7$

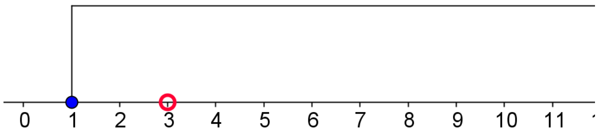
Εξήγηση: Η παράσταση $(x-3)(x-7)$ είναι παραγοντοποιημένο τριώνυμο με ρίζες 3 και 7 και συντελεστή του x^2 : α=1>0.Αρα όπως μάθαμε στην Α Λυκείου είναι αρνητικό, δηλαδή ετερόσημο του α. για τα x μεταξύ των ριζών.

► Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+2x}{x-3}$$

Απάντηση:

Πρέπει $\left.\begin{matrix} x-3\neq 0 \\ x-1\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\neq 3 \\ x\geq 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\in[1,3)\cup(3,+\infty)$



► Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

- $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+5x-1)=2\cdot 3^2+5\cdot 3-1=2\cdot 9+15-1=18+15-1=33-1=32$

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. *Αν εδώ πάμε να αντικαταστήσουμε όπως προηγουμένως όπου x=2, βρίσκουμε* $\dfrac{0}{0}$ *οπότε προχωρούμε ως εξής:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ *Αν εδώ πάμε να αντικαταστήσουμε όπου x=3, βρίσκουμε* $\dfrac{0}{0}$ *οπότε προχωρούμε ως εξής:*

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

► Να γίνουν οι παρακάτω παραγωγίσεις:

$(c)' = 0$. όπου c τυχαίος σταθερός αριθμός.

$(3)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^3)' = 3x^2$

$(x^5)' = 5x^4$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$(e^x)' = e^x$ *(Η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι ο εαυτός της!)*

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $x > 0$

	Κανόνες παραγώγισης
1	$(cf(x))' = cf'(x)$
2	$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
3	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

► Να γίνουν οι παρακάτω παραγωγίσεις με την βοήθεια των πιο πάνω κανόνων παραγώγισης:

$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5\cdot 2x = 10x$

$(x^3 + x - 2)' = (x^3)' + (x)' - (2)' = 3x^2 + 1 - 0 = 3x^2 + 1$

$(x\cdot \ln x)' = (x)'\cdot \ln x + x\cdot(\ln x)' = 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$(x^2\cdot \eta\mu x)' = (x^2)'\cdot \eta\mu x + x\cdot(\eta\mu x)' = 2x\cdot \eta\mu x + x\cdot \sigma\upsilon\nu x$

► Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2+6x+5$

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρεθούν τα ακρότατα της f.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (-2,f(-2))

ΛΥΣΗ:

α) $f'(x)=\left(3x^2+6x+5\right)'=\left(3x^2\right)'+(6x)'+(5)'=3\left(x^2\right)'+6(x)'+0=3\cdot 2x+6\cdot 1=6x+6$

β) Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x+6=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Βρίσκουμε το πρόσημο της παραγώγου για τις διάφορες τιμές του x (δηλαδή για ποιά x η αριθμητική τιμή της είναι + και για ποιά αρνητική.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 6x+6>0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 6x+6<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$

Σχηματίζουμε πινακάκι όπου φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου:

x	-∞	-1	∞
$f'(x)=6x+6$	-	0	+
$f(x)=3x^2+6x+5$	↘	$f(-1)=2$	↗

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

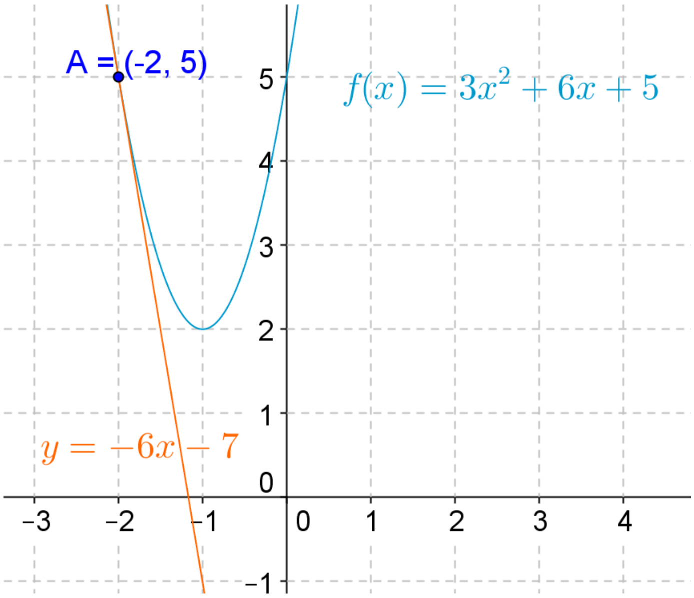
- Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ -1]$
- Γνησίως αύξουσα στο $[-1,\ +\infty)$

γ) Παρουσιάζει ελάχιστο για x=-1 το οποίο είναι ίσο με:

$$f(-1)=3(-1)^2+6(-1)+5=3-6+5=2$$

δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$



Στην περίπτωσή μας :

$x_0=-2$ και:

$$f(x_0)=f(-2)=3\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)+5$$

$$=3\cdot4-12+5=12-12+5=5.$$

Επίσης δεδομένου ότι $f'(x)=6x+6$ έχουμε:

$$f'(-2)=6\cdot(-2)+6=-12+6=-6$$

$$y-5=-6(x+2)\Leftrightarrow y-5=-6x-12\Leftrightarrow y=-6x-12+5\Leftrightarrow y=-6x-7$$

Αρα $y=-6x-7$ η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.