ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΓΕΝΙΚΕΣ (ημιτελές version 9-4-2016)

ΠΡΟΣΟΧΗ! Επισημαίνω ότι πιθανόν να υπάρχουν ατέλειες, ελλείψεις, επιπλέον περιττά στοιχεία ή και λάθη στις λύσεις.Ετσι ο αναγνώστης πρέπει να χρησιμοποιεί τις σημειώσεις με δική του προσοχή, έλεγχο και ευθύνη.

2001

-

2002

2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = x είναι f΄(x) = 1. **Μονάδες 8**

Απάντηση:

Εχουμε: $f(x+h)-f(x)=x+h-x=h$ και για $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

Αρα, $(x)'=1$.

Β. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα; **Μονάδες 6**

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,\ x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ και **γνησίως φθίνουσα** στο *Δ*, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,\ x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

γ. Ισχύει (f(g(x)))΄ = f΄ (g(x)) . g΄ (x)

Σωστό

<u>Σχόλιο</u>: Σχολικό σελ.32

2003 επαναληπτικές

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

α. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(h)}{h}$ h ∈ R , h ≠ 0 και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ h ∈ R , h ≠ 0

γ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ h ∈ R , h ≠ 0 και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

δ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(h)}{h}$ h ∈ R , h ≠ 0 **Μονάδες 5**

Απάντηση

γ.

2004

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x) = c είναι ίση με 0. **Μονάδες 8**

Απάντηση:

Εχουμε: $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ και για $h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$

Αρα $(c)'=0$.

Β. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Απάντηση:

Μια συνάρτηση συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2004 επαναληπτικές

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ **τότε** $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=\ell_1\ell_2$

Σωστό

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Λάθος

γ. Ισχύει $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Σωστό

δ. Ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ με $x>0$.

Λάθος

2005

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Μονάδες 2**

Σωστό

β. Ισχύει $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$ όπου f, g, παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Μονάδες 2

Λάθος

Σχόλιο: Το λάθος έγκειται ότι στον αριθμητή αντί + θέλει -.

2005 επαναληπτικές

Α.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $F(x)$, $f(x)$ και $g(x)$ με $F(x)=f(x)+g(x)$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι $F'(x)=f'(x)+g'(x)$ **Μονάδες 9**

Απάντηση:

Εχουμε :

$F(x+h)-F(x)=\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)=\left(f(x+h)-f(x)\right)+\left(g(x+h)-g(x)\right)$ και

για h≠0

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

Αφού όμως $\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)$ τελικά έχουμε: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$

β. Αν x>0, τότε. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. **Μονάδες 2**

Σωστό

2006

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR. και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$, $x\in$ IR . **Μονάδες 10**

Απάντηση:

Εστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$

Εχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\left(f(x+h)-f(x)\right)$, και για h≠0

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$$

β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Απάντηση:

Μια συνάρτηση συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0. **Μονάδες 2**

Σωστό

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

Λάθος

Σχόλιο: Σχολικό σ.29.Το λάθος έγκειται στο ότι λείπει ένα – μπροστά από το κλάσμα στο 2^{ο} μέλος.

2006 επαναληπτικές

B.1 Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 3

Απάντηση:

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A*, λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_0.

B.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ; **Μονάδες 3**

Απάντηση:

Μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως μονότονη** σε ένα διάστημα όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

β. Ισχύει: (συνx)΄ =ημx, για κάθε x ∈ IR . **Μονάδες 2**

Λάθος

Σχόλιο: Σχολικό σ. 30.Το λάθος έγκειται ότι απουσιάζει ένα – μπροστά από το 2^{ο} μέλος.

2007

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση:

Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της, όταν:

υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

και είναι πραγματικός αριθμός

Το όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται «έφ τονούμενο του x_0" .Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Γ1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

β. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ **Μονάδες 2**

Σωστό

σ. 33 σχολικό

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν f΄(x_0)=0 για x_0∈(α,β), f΄(x)>0 στο (α,x_0) και f΄(x)<0 στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για x=x_0 ελάχιστο. **Μονάδες 2**

Λάθος

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x)=x^\nu$, όπου ν φυσικός

$f_2(x)=\ln x$, όπου x>0

$f_3(x)=\sqrt{x}$, όπου x>0

$f_4(x)=$συνx, όπου x πραγματικός. **Μονάδες 4**

$$f_1'(x)=\left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}$$

$$f_2'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$ όπου x>0

$$f_3'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$ όπου x>0

$$f_4'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$$

2007 επαναληπτικές

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f(x) = x είναι f΄(x) = 1. **Μονάδες 8**

Απάντηση:

Εχουμε: $f(x+h)-f(x)=x+h-x=h$ και για $h\neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

Αρα, $(x)'=1$.

Γ1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.*

β. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με g(x)≠0, τότε ισχύει

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$ **Μονάδες 2**

Σωστό

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f΄(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Μονάδες 2**

Σωστό

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x)=e^x$

$f_2(x)=\dfrac{1}{x}$

$f_3(x)=\eta\mu x$

$f_4(x)=c$ **Μονάδες 4**

Απάντηση:

$f_1'(x)=e^x$

$f_2'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ *(σχολικό σ.29)*

$f_3'(x)=\sigma\upsilon\nu x$

$f_4'(x)=0$ **Μονάδες 4**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x) = c (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$. **Μονάδες 8**

Απάντηση:

Εχουμε: $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

Αρα $(c)' = 0$.

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

γ. Αν x>0, τότε $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **Μονάδες 2**

Σωστό

δ. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ **Μονάδες 2**

Σωστό

σ. 16 σχολικό βιβλίο

2008 επαναληπτικές

Α. Εστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x)+ g'(x)$ **Μονάδες 9**

Απάντηση:

Εστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$

Εχουμε

$F(x+h)-F(x)=\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)=\big(f(x+h)-f(x)\big)+\big(g(x+h)-g(x)\big)$ και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη. **Μονάδες 2**

Σωστό

Σχολικό σ.16

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$, τότε $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{\nu}=\ell_1^{\ \nu}$ (ν θετικός ακέραιος). **Μονάδες 2**

Σωστό

Σχολικό σ. 16

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. **Μονάδες 2**

Λάθος

2009

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$ **Μονάδες 2**

Λάθος

γ. Για τη συνάρτηση f(x)=ημx ισχύει ότι

$(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$ **Μονάδες 2**

Λάθος

2009 Επαναληπτικές

Β. α. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$; **Μονάδες 3**

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x_1) \geq f(x)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό , δηλαδή αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^\nu = \nu \ell^{\nu-1}$ **Μονάδες 2**

Λάθος

β. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) = e^x$ **Μονάδες 2**

Σωστό

2010

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)$$

Σωστό

β) Για κάθε x>0 ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Λάθος

<u>Σχόλιο</u>: Το ορθό είναι $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

γ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση x=f(t), τη χρονική στιγμή t_0 είναι $υ(t_0)=f'(t_0)$

Σωστό

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

Λάθος

2010 επαναληπτικές

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και c∈R, να αποδείξετε ότι

$(cf(x))' = cf'(x)$, x∈Δ. **Μονάδες 9**

Απάντηση:

Εστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$

Εχουμε $F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c\left(f(x+h) - f(x)\right)$, και για h≠0

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x)$$

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο *Δ*, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το A

Λάθος

β) Ισχύει $\lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$.

Σωστό

2011

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ **Μονάδες 2**

Σωστό

2011 επαναληπτικές

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Α;

Μονάδες 4

Απάντηση:

Απάντηση:

Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της, όταν

υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

και είναι πραγματικός αριθμός

Το όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται «έφ τονούμενο του x_0”. Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν x>0, τότε $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Λάθος

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Σωστό

2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι (f (x) + g(x))′ = f ′(x)+ g′(x), $x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 7**

Απάντηση:

Εστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$

Εχουμε

$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))$ και

για h≠0

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του y = f (x) ως προς x , όταν x = x_0

Σωστό **(μονάδες 2).**

σ.23 σχολικό

ε) $\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ **,** $x_0 \in \mathbb{R}$ **(μονάδες 2).**

Σωστό

σ.16 σχολικό

2012 επαναληπτικές

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f(x)=c, x∈$\mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι (c)′=0 **Μονάδες 7**

Απάντηση:

Εχουμε: $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

οπότε $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$

Αρα $(c)' = 0$ **.**

Α3. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$; **Μονάδες 4**

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν

$f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

δ) (συνx)΄=ημx, $x \in \mathbb{R}$.

Λάθος

2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f (x)=x είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Απάντηση:

Εχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$ και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Επομένως $\lim\limits_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h \to 0}1=1$

Αρα $(x)'=1$

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ **Μονάδες 4**

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x_0 \in A$ όταν

$f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0.

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ **(μονάδες 2)**

Λάθος

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f , g ισχύει ότι

$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ **(μονάδες 2)**

Σωστό

2013 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

Α3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο xο του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Απάντηση:

Παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της, ονομάζεται το όριο

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ αν

i) υπάρχει και

ii) είναι πραγματικός αριθμός

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται «έφ τονούμενο του x_0”

Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x\to x_0}(\sigma\upsilon\nu x)=\sigma\upsilon\nu x_0$ **(μονάδες 2)**

Σωστή

β) $(cf(x))'=cf'(x)$

Σωστή

2014

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο και c σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι :

$(cf(x))'=cf'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 7**

Απάντηση *σχολικό σ.30*

Εστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$

Εχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\big(f(x+h)-f(x)\big)$, και για h≠0

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομένως: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Απάντηση *σχολικό σ.30*

Μια συνάρτηση λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$.

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'\left(x_0\right) = 0$, για x $\in\left(\alpha,\ \beta\right)$, και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό. **(μονάδες 2)**

Σωστό

(σχολικό βιβλίο σ. 40 Σχόλιο στο κάτω μέρος της σελίδας)

2014 Επαναληπτικές

ΘΕΜΑ Α

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in$ A ; **Μονάδες 4**

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in$Α, όταν $f\left(x_1\right) \geq f\left(x\right)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

γ) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι $f'\left(x_0\right)$. **(μονάδες 2)**

Σωστό

2015 *(ίδιο με 2012)*

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι (f (x) + g(x))′ = f ′(x)+ g′(x), $x \in \mathbb{R}$ **Μονάδες 7**

Απάντηση:

Εστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$

Εχουμε:

$F(x+h) - F(x) = \left(f(x+h) + g(x+h)\right) - \left(f(x) + g(x)\right) = \left(f(x+h) - f(x)\right) + \left(g(x+h) - g(x)\right)$ και

για h≠0 $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

(Σχολικό σ. 31)

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Απάντηση:

Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της, όταν

υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

και είναι πραγματικός αριθμός

Το όριο συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται «έφ τονούμενο του x_0". Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(Σχολικό σ. 27)

Σωστό-Λάθος

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και

και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$.

Λάθος

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

Σωστό

2015 επαναληπτικές

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής; **Μονάδες 4**

Απάντηση:

Μια συνάρτηση ***f*** με πεδίο ορισμού ***A*** λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει**:**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Σωστό- Λάθος

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού Α, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το Α.

Λάθος

Σχόλιο: Το πηλίκο ορίζεται για $x \in A$ με $g(x)\neq 0$

β) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Σωστό