ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 (version 9-6-2016)

1. Α Να δώσετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της.

Απάντηση:

Παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της, ονομάζεται το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ αν

i) υπάρχει και

ii) είναι πραγματικός αριθμός

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται «έφ τονούμενο του x_0"

Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

1. Β i) Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου ότι για την συνάρτηση $f(x)=x$ η παράγωγός της στο σημείο x_0 είναι: $f'(x_0)=1$

Απάντηση:

Εστω η συνάρτηση $f(x)=x$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}=h$$

και για $h\neq 0$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}=1$$

επομένως:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Β i) Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, ότι για την συνάρτηση $f(x)=x^2$ η παράγωγός της στο σημείο x_0 είναι: $f'(x_0)=2x_0$.

Απάντηση:

Εστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(x_0+h)^2-x_0{}^2=\cancel{x_0^2}+2x_0h+h^2\cancel{-x_0^2}=2x_0h+h^2=(2x_0+h)h$$

και για $h\neq 0$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(2x_0+h)\cancel{h}}{\cancel{h}}=2x_0+h$$

επομένως:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. *Συμπληρώστε τα κενά με κάποια από τις παρακάτω λέξεις:*

• ποσοτικές--δεν—συνεχείς---τιμές—διακριτές –διαστήματος--ποιοτικές –φύλο—αριθμοί. στοιχεία—στατιστικά δεδομένα--πληθυσμός-- χαρακτηριστικά—μεταβλητές—σύνολο—πληθυσμού

● Συχνά έχουμε ένα .... (ανθρώπων, πραγμάτων) και θέλουμε να εξετάσουμε τα .... του ως προς ένα ή περισσότερα .... τους.

Ένα τέτοιο σύνολο λέγεται (στην Στατιστική) **............................**

● Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **..........................**

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται .... **της μεταβλητής**.

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

Α. Σε .... ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι .... τους .... είναι αριθμοί.

Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος (με τιμές Α, Β, ΑΒ, Ο), το .... (με τιμές αγόρι, κορίτσι) κλπ

Β. Σε .... μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι .... και διακρίνονται:

i) Σε .... μεταβλητές, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές.

Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,…), κτλ.

ii) Σε .... μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός .... πραγματικών αριθμών (α, β).

Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, κτλ.

● Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του .... ως προς ένα χαρακτηριστικό τους (μεταβλητή) προκύπτει μια σειρά από δεδομένα που λέγονται .... ή **παρατηρήσεις**.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

● Συχνά έχουμε ένα **σύνολο** (ανθρώπων, πραγμάτων) και θέλουμε να εξετάσουμε τα **στοιχεία** του ως προς ένα ή περισσότερα ***χαρακτηριστικά*** τους.

Ένα τέτοιο σύνολο λέγεται **πληθυσμός.**

● Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές.** Οι **δυνατές** τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές** της μεταβλητής.

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

Α. Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους **δεν** είναι αριθμοί.

Τέτοιες είναι, για παράδειγμα, η ομάδα αίματος (με τιμές Α, Β, ΑΒ, Ο), το .... (με τιμές αγόρι, κορίτσι) κλπ

Β. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι **αριθμοί** και διακρίνονται:

i) Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο "μεμονωμένες" τιμές.

Τέτοιες μεταβλητές είναι, για παράδειγμα, ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης (με τιμές 1,2,...), κτλ.

ii) Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός **διαστήματος** πραγματικών αριθμών (α, β).

Τέτοιες μεταβλητές είναι το ύψος και το βάρος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου, κτλ.

● Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του **πληθυσμού** ως προς ένα χαρακτηριστικό τους (μεταβλητή) προκύπτει μια σειρά από δεδομένα που λέγονται **στατιστικά δεδομένα** ή **παρατηρήσεις**.

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Να συμπληρώσετε τα κενά

Εκτελούμε ένα πείραμα τύχης ρίχνοντας ένα (*αμερόληπτο*) ζάρι.Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται .... του πειράματος τύχης συμβολίζεται με Ω και στο συγκεκριμένο πείραμα τύχης είναι το ....

Κάθε <u>υποσύνολο</u> του δειγματικού χώρου λέγεται .... του πειράματος τύχης

Εστω τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}=\{1,2,3\}$ και $\mathrm{B}=\{3,4\}$

Τότε σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας $P(\mathrm{A})=\frac{}{}=\frac{}{}=\frac{}{}$ και ομοίως

$P(\mathrm{B})=\frac{}{}=\frac{}{}=\frac{}{}$

Επειδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{3\}\neq$ τα ενδεχόμενα δεν είναι ....

Για την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ισχύει πάντοτε $......\leq P(\mathrm{A})\leq .....$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Εκτελούμε ένα πείραμα τύχης ρίχνοντας ένα αμερόληπτο ζάρι.Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται

δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης και στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Κάθε <u>υποσύνολο</u> του δειγματικού χώρου λέγεται **ενδεχόμενο** του πειράματος τύχης

Εστω τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}=\{1,2,3\}$ και $\mathrm{B}=\{3,4\}$

Τότε σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας $P(\mathrm{A})=\frac{N(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ και

$P(\mathrm{B})=\frac{N(\mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Επειδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{3\}\neq$ τα ενδεχόμενα δεν είναι ασυμβίβαστα.

Για την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ισχύει πάντοτε $0\leq P(\mathrm{A})\leq 1$

Η παράγωγος είναι ένα μαθηματικό εργαλείο με το οποίο μπορούμε να μελετήσουμε μια συνάρτηση ως προς την μονοτονία (γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα) και τα ακρότατα (μέγιστα, ελάχιστα)
Η πρακτική σημασία του να υπολογίζω μέγιστα και ελάχιστα είναι προφανής αν σκεφτούμε ότι μας ενδιαφέρει να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος, να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα του υλικού για μιά κατασκευή κλπ.
Μπορώ να υπολογίσω την παράγωγο οποιασδήποτε (παραγωγίσιμης) συνάρτησης γνωρίζοντας
1. την παράγωγο κάποιων βασικών συναρτήσεων και
2. Κάποιους κανόνες παραγώγισης (παράγωτος αθροίσματος-διαφοράς συναρτήσεων-παράγωγος γινομένου αριθμού επί συνάρτηση κλπ
Αυτά θα τα βρείτε στο βιβλίο σας σε πινακάκι σ.33.Από το πινακάκι αυτό «αποσπώ» και παραθέτω όσα θα μας χρειαστούν για την παραγώγιση στις 2 πιο κάτω ασκήσεις ασκήσεις.

	Παράγωγος βασικών συναρτήσεων	Κανόνες παραγώγισης
1	$(c)'=0$	$(cf(x))'=cf'(x)$
2	$(x)'=1$	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
3	$(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1},\quad \nu>1$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^2-6x-1$

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρεθούν τα ακρότατα της f.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (2, f(2))

ΛΥΣΗ:

α) $f'(x)=(3x^2-6x-1)'=(3x^2)'-(6x)'-(1)'=3(x^2)'-6(x)'+0=3\cdot 2x-6\cdot 1=6x-6$

β) Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Βρίσκουμε το πρόσημο της παραγώγου για τις διάφορες τιμές του x (δηλαδή για ποιά x η αριθμητική τιμή της είναι + (θετική) και για ποιά αρνητική.

$f'(x)>0\Leftrightarrow 6x-6>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 6x-6<0\Leftrightarrow x-1<0\Leftrightarrow x<1$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Σχηματίζουμε πινακάκι όπου φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου και η μονοτονία και τα ακρότατα της f σύμφωνα με την Θεωρία σ. 40 σχολικού

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)=6x-6$	-	0	+
$f(x)=3x^2-6x-1$	↘	$f(1)=-4$	↗

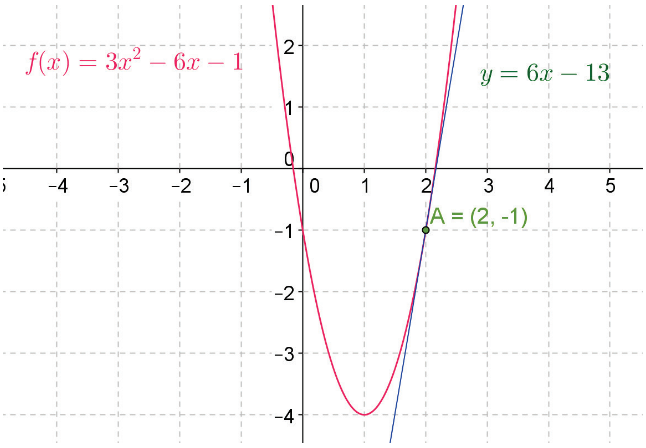
Διατυπώνουμε και λεκτικά τα αποτελέσματα:

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 1]$
- Γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$

γ) Παρουσιάζει ελάχιστο για x=1 το οποίο είναι ίσο με:

$f(1)=3\cdot1^2-6\cdot1-1=3-6-1=-4$



δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ δίνεται από τον τύπο:

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Στην περίπτωσή μας :

$x_0=2$ και: $f(x_0)=f(2)=3\cdot2^2-6\cdot2-1=12-12-1=-1$.

Επίσης δεδομένου ότι $f'(x)=6x-6$ έχουμε:

$f'(2)=6\cdot2-6=12-6=6$

$y+1=6(x-2)\Leftrightarrow y+1=6x-12\Leftrightarrow y=6x-12-1\Leftrightarrow y=6x-13$

Αρα $y=6x-13$ η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

2. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $x^3 + 6x^2 + 9x - 6$

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f. (Μονάδες 5)

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 15)

γ) Να βρεθούν τα ακρότατα της f. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

α) $f'(x) = (x^3 + 6x^2 + 9x - 6)' = 3x^2 + 6\cdot 2x + 9 - 0 = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3)$

Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 + 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

$\alpha=1$, $\beta=4$ $\gamma=3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

.

Σχηματίζουμε πινακάκι όπου φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου.Επειδή 3>0 το πρόσημο της παραγώγου $3(x^2 + 4x + 3)$ είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 4x + 3$ που από την Α Λυκείου γνωρίζουμε ότι έξω από τις ρίζες γίνεται ομόσημο του α=1, (δηλαδή θετικό) και ανάμεσα στις ρίζες ετερόσημο του α=1, (δηλαδή αρνητικό).

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)=3(x^2+4x+3)$		+	0	-	0	+	
f(x) $=x^3+6x^2+9x-6$		↗		↘		↗	

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ -3]$
- Γνησίως φθίνουσα στο $[-3,\ -1]$
- Γνησίως αύξουσα στο $[-1,\ +\infty)$

γ) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=-3 το οποίο είναι ίσο με:

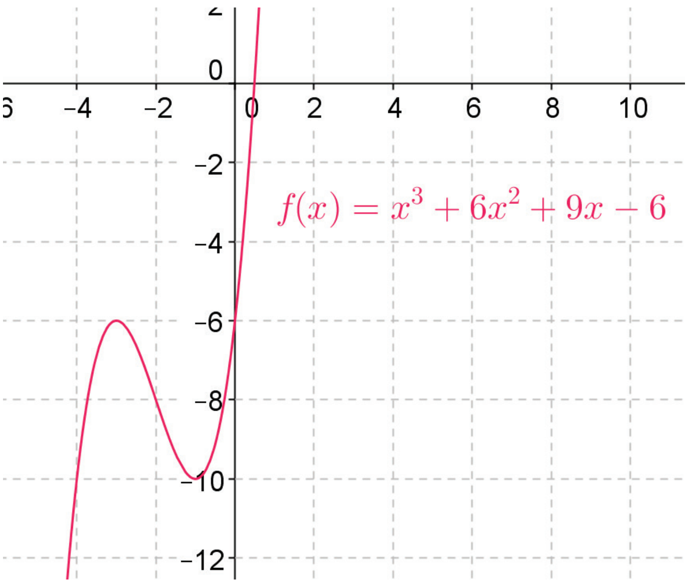
$$f(-3)=(-3)^3+6(-3)^2+9(-3)-6=$$

$$-27+6\cdot 9-27-6=-54+54-6=-6$$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=-1 το οποίο είναι ίσο με:

$$f(-3)=(-1)^3+6(-1)^2+9(-1)-6=$$

$$-1+6-9-6=-10$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

1. Ενα γκρούπ 5 μαθητών έχει στα μαθηματικά τους κάτωθι βαθμούς

11, 19, 20, 12, 13

α) Να υπολογίστε τα κάτωθι μέτρα θέσεως

i) Μέση τιμή (mean)

ii) Διάμεσο (median)

β) Να υπολογίσετε τα κάτωθι μέτρα διασποράς

i) Εύρος (range)

ii) Διασπορά (variance)

iii) Τυπική απόκλιση (standard deviation) (Δίνεται: $\sqrt{14} \simeq 3{,}741$)

ΛΥΣΗ:

α) **i)** $\bar{x} = \dfrac{11+19+13+20+12}{5} = \dfrac{65}{5} = \mathbf{15}$

ii) Αρχικά διατάσσω τις παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά:

11, 12, 13, 19, 20

Εφόσον έχουμε περιττό πλήθος παρατηρήσεων (5) η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή:

Διάμεσος=13

β) i) Το εύρος είναι η διαφορά της μικρότερης από την μεγαλύτερη παρατήρηση δηλαδή:

Εύρος = 20-11=9

ii) ***Σημείωση**: Στον πιο κάτω τύπο:*
το Σ συμβολίζει άθροισμα,
το ti μια παρατήρηση και στην συγκεκριμένη περίπτωση κάποιον από τους αριθμούς που σας δίνω
το $\bar{x}$ την μέση τιμή που υπολογίσατε πιο πάνω
ν το πληθος των παρατηρήσεων που εδώ είναι 5.

Διασπορά $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}\right)^2}{\nu} = \dfrac{(11-\mathbf{15})^2+(19-\mathbf{15})^2+(13-\mathbf{15})^2+(20-\mathbf{15})^2+(12-\mathbf{15})^2}{5} =$

$\dfrac{(-4)^2+4^2+(-2)^2+5^2+(-3)^2}{5} = \dfrac{16+16+4+25+9}{5} = \dfrac{70}{5} = 14$

iii) Τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{14} \simeq 3{,}741$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

Η πιο κάτω άσκηση είναι μια απλή, αλλά βασική για εξάσκηση κάποιων τύπων.Θα σας φανεί πολύ εύκολη αν κάνετε τον κόπο να διαβάστε το πιο κάτω απλό παραδειγματάκι και επαναλάβουμε τους τύπους.

Παράδειγμα:

Εξετάζουμε 10 οικογένειες (που έχουν παιδιά), ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και βάζουμε τις 10 παρατηρήσεις μας σε πίνακα:

x_i (αριθμός παιδιών)	v_i (συχνότητα)	f_i %	N_i	F_i%	$x_i v_i$
1	3	30			
2	5		8		
3	2				
Σύνολο	**10**				

Τι κλάσμα, (τί μέρος), του συνόλου είναι όσοι έχουν 1 παιδί?

Είναι: $\frac{v_1}{v}=\frac{3}{10}=0,3$.Αυτή είναι η σχετική συχνότητα fi αλλά επειδή είμαστε πιο εξοικειωμένοι με τα ποσοστά, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που βρήκαμε με 100 και έχουμε την σχετική συχνότητα επί τοις εκατό. $f_1\%=f_1\cdot 100=0,3\cdot 100=30\%$.

● Αν θέλουμε να απαντήσουμε στην ερώτηση πόσες οικογένεις έχουν **ως και** 2 παιδιά, τότε προφανώς είναι όσοι έχουν 1 παιδί, δηλαδή 3 οικογένειες και όσοι έχουν 2 παιδιά δηλαδή 5 Αυτή είναι η αθροιστική συχνότητα $\mathrm{N}_2=v_1+v_2=3+5=8$

Υπενθύμιση:

- x_i τιμή μιας παρατήρησης στο δείγμα που εξετάσαμε.
- v_i η συχνότητα με την οποία εμφανίζεται η παρατήρηση x_i (δηλαδή πόσες φορές εμφανίζεται)
- v το μέγεθος του δείγματος που εξετάσαμε (είναι το άθροισμα όλων των v_i)
- f_i % η σχετική συχνότητα επί τοις εκατό της παρατήρησης x_i.Είναι $f_i\%=\frac{v_i}{v}\cdot 100$
- N_i αθροιστική συχνότητα,
- F_i % σχετική αθροιστική συχνότητα επί τοις εκατό (ότι είναι το N_i για τα v_i είναι το F_i % για τα f_i %.Αν καταλάβατε το ένα καταλάβατε και το άλλο.

2.Δίνεται ο πίνακας:

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

x_i	v_i	f_i %	N_i	F_i%	$x_i v_i$
1			5		
2	20				
3	15				
4					
Σύνολο	50				

α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας. Δικαιολόγηση να γίνει μόνο για τα στοιχεία της $1^{ης}$, $2^{ης}$ και $3^{ης}$ γραμμής. **(Μονάδες 10)**

β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή. **(Μονάδες 8)**

γ) Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων. **(Μονάδες 7)**

ΛΥΣΗ:

α) Είναι $\nu_1 = \mathrm{N}_1 = 5$

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\nu \Rightarrow 5+20+15+\nu_4=50 \Rightarrow 25+15+\nu_4=50 \Rightarrow 40+\nu_4=50 \Rightarrow \nu_4=50-40=10$$

x_i	v_i	f_i %	N_i	F_i%	$x_i v_i$
1	5	10	**5**	10	5
2	**20**	40	25	50	40
3	**15**	30	40	80	45
4	10	20	50	100	40
Σύνολο	**50**	100			

- $f_1\% = \dfrac{\nu_1}{\nu}\cdot 100 = \dfrac{5}{50}100 = 5\cdot 2 = 10$

$f_2\% = \dfrac{\nu_2}{\nu}\cdot 100 = \dfrac{20}{50}100 = 20\cdot 2 = 40$

$f_3\% = \dfrac{\nu_3}{\nu}\cdot 100 = \dfrac{15}{50}100 = 15\cdot 2 = 30$

- $\mathrm{N}_2 = \nu_1+\nu_2 = 5+20 = 25$

$\mathrm{N}_3 = \nu_1+\nu_2+\nu_3 = 5+20+15 = 40$

ή αλλιώς $\mathrm{N}_3 = \underbrace{\nu_1+\nu_2}_{\mathrm{N}_2}+\nu_3 = \mathrm{N}_2+\nu_3 = 25+15 = 40$

- $F_1\% = f_1\% = 10$

$F_2\% = f_1\% + f_2\% = 10+40 = 50$

$F_3\% = f_1\% + f_2\% + f_2\% = 10+40 = 50$

- $x_1\nu_1 = 1\cdot 5 = 5$

$x_2\nu_2 = 2\cdot 20 = 40$

$x_3\nu_3 = 3\cdot 15 = 45$

β) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i}{\nu} = \dfrac{5+40+45+40}{50} = \dfrac{130}{50} = 2,6$

γ) Αρχικά πρέπει να τοποθετήσουμε τις 50 παρατηρήσεις μας από την μικρότερη στην μεγαλύτερη.

Ηδη στον πίνακα οι παρατηρήσεις είναι από την μικρότερη στην μεγαλύτερη, αλλά βοηθάει ίσως και η πιο κάτω γραφή

$$\underbrace{1,1,.....,1}_{5}\underbrace{2,2,.....,2}_{20}\underbrace{3,3,.....,3}_{15}\underbrace{4,4,.....,4}_{10}$$

Εχουμε ν=50 παρατηρήσεις που είναι άρτιος αριθμός, άρα η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων που είναι η 25η και η 26η

Με την βοήθεια της παραστατικής πιο πάνω γραφής διαπιστώνουμε ότι η 25η παρατήρηση είναι 2 και η 26η είναι 3.Αρα η διάμεσος είναι:

$$\delta = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Σημείωση: Στην παράγραφο «Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων σ.150-152 υπάρχουν 5 κανόνες λογισμού πιθανοτήτων.Η παρακάτω άσκηση αποτελεί απλή αριθμητική εφαρμογή των κανόνων αυτών ώστε να πιστοποιείται η γνώση τους.Από τους 5 αυτούς κανόνες μόνο οι 4 χρησιμοποιούνται εδώ.Τους που υπενθυμίζω για ευκολία

● Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$ *(Προσθετικός νόμος)*

● Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β (ασυμβίβαστα σημαίνει $A \cap B = \varnothing$) ισχύει:

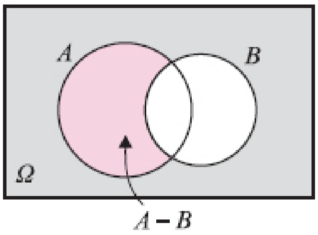
$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$ *(Απλός προσθετικός νόμος)*

● Για δύο συμπληρωματικά ($A \cup A' = \Omega$) ενδεχόμενα Α και Α' ισχύει:

$P(A')=1 - P(A)$

● Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$



Φυσικά στην θέση των Α και Β μπορεί να είναι άλλα γράμματα αλλά αυτό δεν πρέπει να σας δυσκολεύει στην εφαρμογή των πιο πάνω κανόνων.

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr

►Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{2}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

α) $A \cup B$ (Μονάδες 5)

β) A-B και B-A (Μονάδες 8)

γ) Να μην πραγματοποιηθεί **κανένα** από τα A ή B. (Μονάδες 6)

δ) Να πραγματοποιηθεί **μόνο ένα** από τα A ή B. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ:

α) $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

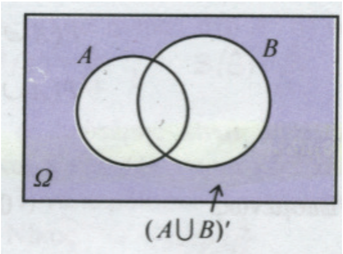
Από τον προσθετικό νόμο έχουμε διαδοχικά:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5}{15} + \frac{9}{15} = \frac{14}{15}$$

β) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

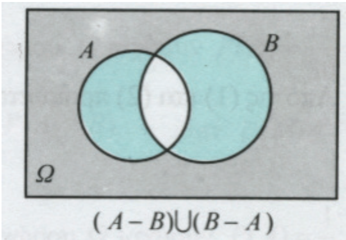
$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{9}{15} - \frac{5}{15} = \frac{4}{15}$$

γ) $P\left[(A \cup B)'\right] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15}$



δ) α' τρόπος

Αφού τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα δηλαδή δεν έχουν κοινά στοιχεία όπως φαίνεται και στο δίπλα σχήμα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος



$$P\left[(A - B) \cup (B - A)\right] = P(A - B) + P(B - A) \overset{\beta)}{=} \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Αθανασίου Δημήτρης asepfreedom@yahoo.gr peira.gr