

2001

ΘΕΜΑ 1ο

**A.1.** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει ότι:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

**Μονάδες 8,5**

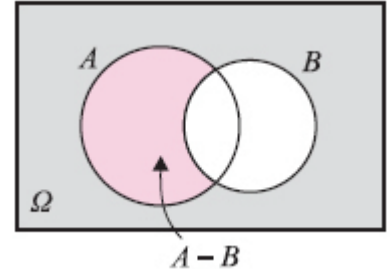
**Απόδειξη:**

Επειδή τα ενδεχόμενα A-B και  $A \cap B$  είναι ασυμβίβαστα και

$A = (A-B) \cup (A \cap B)$ , έχουμε από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A) = P[(A-B) \cup (A \cap B)] = P(A-B) + P(A \cap B)$$

$$\text{Άρα } P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$



**A.2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις και να συμπληρώσετε καθεμιά από αυτές με το κατάλληλο σύμβολο, ( $=, \leq, \geq$ ) έτσι ώστε να είναι αληθής:

**α.**  $P(A') \dots 1 - P(A)$

**Μονάδες 2**

**β.** αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B) \dots P(A)$ .

**Μονάδες 2**

**Απάντηση:**

**α.**  $P(A') = 1 - P(A)$

**β.** αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B) \geq P(A)$ .

**B.1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  και  $A'$  το αντίθετο του ενδεχομένου A.

**α.** Αν  $A' \subseteq B$  τότε  $P(A) + P(B) < 1$ .

**β.** Αν  $P(A) = P(A')$  τότε  $2P(A) = P(\Omega)$ . **Μονάδες 4**

**Απάντηση:**

**α. Λάθος**

Σχόλιο:  $P(A') \leq P(B) \Rightarrow 1 - P(A) \leq P(B) \Rightarrow 1 \leq P(A) + P(B)$

**β. Σωστό**

Σχόλιο:  $P(A) + P(A') = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(A) = P(\Omega) \Rightarrow 2P(A) = P(\Omega)$

**B.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $A \subseteq B$ ,  $P(A) = \frac{1}{4}$  και  $P(B) = \frac{5}{12}$  τότε η  $P(A \cup B)$  είναι ίση με:

α.  $\frac{1}{4}$    β.  $\frac{5}{12}$    γ.  $\frac{2}{3}$    δ.  $\frac{1}{6}$ .

**Μονάδες 2,5**

**Απάντηση:**

**β**

Ερμηνεία: Αφού  $A \subseteq B$  είναι  $A \cup B = B$  οπότε:  $P(A \cup B) = P(B) = \frac{5}{12}$

**B.3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  και ισχύει ότι  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$  και

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

	Στήλη Α	Στήλη Β
α.	$P(A - B)$	1. $\frac{1}{20}$
β.	$P((B - A)')$	2. $\frac{2}{15}$
γ.	$P((A \cap B)')$	3. $\frac{4}{5}$
		4. $\frac{1}{12}$
		5. $\frac{19}{20}$

α → 2

β → 5

γ → 3

Ερμηνεία:

$$\text{Για το α: } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Για το β:

$$P((B - A)') = 1 - P(B - A) = 1 - [P(B) - P(B \cap A)] = 1 - P(B) + P(B \cap A) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{19}{20}$$

Για το γ:

$$P\left((A \cap B)'\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

## 2001 επαναληπτικές

----

## 2002

**B.1.** Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού τα A και B ασυμβίβαστα (δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο) θα ισχύει

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \quad (1)$$

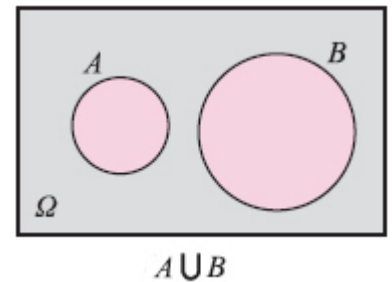
Διαιρώντας τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως (από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι **ανά δύο** ασυμβίβαστα θα έχουμε  $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$ .



**B.2. α.** Να δώσετε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

**Μονάδες 5**

### **Απάντηση:**

► Κλασσικός ορισμός της πιθανότητας

Για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει:

$$\text{Πιθανότητα ενδεχομένου } A = P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοικών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

**β.** Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i)  $P(\Omega)$  ii)  $P(\emptyset)$ .

**Μονάδες 2**

### **Απάντηση:**

i)  $P(\Omega) = 1$

ii)  $P(\emptyset) = 0$

## 2002 επαναληπτικές

2003

δ. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B = \emptyset$ .

**Σωστό**

## 2003 επαναληπτικές

ΘΕΜΑ 1ο

A. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

**Μονάδες 9**

**Απάντηση:**

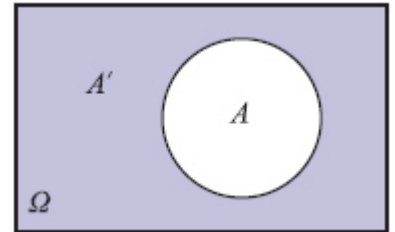
Αφού τα ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά ισχύει  $A \cup A' = \Omega$   
Επειδή  $A \cap A' = \emptyset$ , δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

$$\text{Οπότε } P(A') = 1 - P(A).$$



2004

Δ. Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης. Στη Στήλη I αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα και στη Στήλη II σχέσεις διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης I και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης II που αντιστοιχεί στην ίδια διατύπωση.

	Στήλη I		Στήλη II
α	Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B	1	$A \cap B$
β	Πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B	2	$A - B$
γ	Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B	3	$(A \cup B)'$
		4	$A \cup B$

Στη Στήλη II περισεύει μία σχέση.

α  $\longrightarrow$  4

β  $\longrightarrow$  2

γ  $\longrightarrow$  1

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , τότε να αποδείξετε ότι  $P(A) \leq P(B)$ .

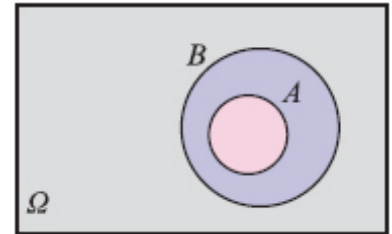
**Μονάδες 7****ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Επειδή  $A \subseteq B$  προφανώς ισχύει:

$$N(A) \leq N(B) \quad \text{διαιρούμε κατά μέλη με } N(\Omega) > 0$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \quad \text{κλασσικός άρισμός πιθανότητας}$$

$$P(A) \leq P(B)$$



**B. α.** Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;

**Απάντηση:**

Ένα πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment) όταν δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα του, μολονότι επαναλαμβάνεται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης δεν μπορεί να προβλεφτεί αφού εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

*Παραδείγματα πειραμάτων τύχης:*

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.
3. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.

**β.** Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

**Μονάδες 6**

**Δειγματικός χώρος** (sample space) ενός πειράματος τύχης λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα  $\Omega$ . Αν δηλαδή  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

**Σωστό - Λάθος**

**ε.** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει  $P(A') = 1 + P(A)$ .

**Λάθος**

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Μονάδες 10**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα  $N(A) + N(B)$  το πλήθος των στοιχείων του  $A \cap B$  υπολογίζεται δυο φορές.

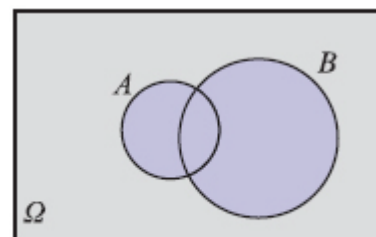
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως (από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).



**δ. Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) > P(B)$ . Μονάδες 2**

### **Λάθος**

Σχόλιο: Το σωστό είναι  $P(A) \leq P(B)$

## 2005 επαναληπτικές

**ε. Αν για τα ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει**

**$P(A) = P(B)$ , τότε είναι πάντοτε  $N(A) = N(B)$ . Μονάδες 2**

### **Σωστό**

Σχόλιο:  $P(A) = P(B) \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(A) = N(B)$

**Β.α.** Πότε δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 3**

**Απάντηση:**

**δ.** Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν  $A \cap B = \emptyset$ .

**β.** Αν το ενδεχόμενο  $A'$ , συμπληρωματικό του ενδεχομένου  $A$ , πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το  $A$ .

**Μονάδες 2**

**Σωστό**

## 2006 επαναληπτικές

### ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι ισχύει:  
 $P(A') = 1 - P(A)$ .

**Μονάδες 9**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αφού τα ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά ισχύει  $A \cup A' = \Omega$

Επειδή  $A \cap A' = \emptyset$ , δηλαδή τα  $A$  και  $A'$  είναι ασυμβίβαστα, έχουμε

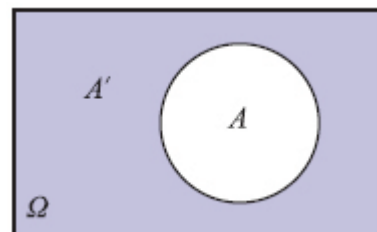
διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

$$\text{Οπότε } P(A') = 1 - P(A).$$



**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**α.** Το ενδεχόμενο  $A \cup B$  πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ .

**Μονάδες 2**

**Λάθος**

**Σχόλιο:** Το σωστό είναι ότι το ενδεχόμενο  $A \cup B$  πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$ .

**ε.** Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Τότε ισχύει:  $P(\emptyset) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$ . **Μονάδες 2**

**Σωστό**

2007

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B). \quad \text{Μονάδες 8}$$

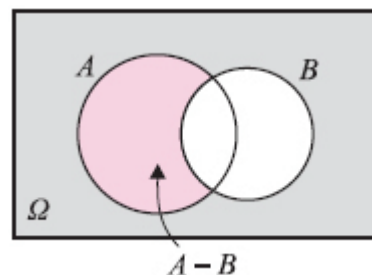
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα A-B και  $A \cap B$  είναι ασυμβίβαστα και

$A = (A-B) \cup (A \cap B)$ , έχουμε από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A) = P[(A-B) \cup (A \cap B)] = P(A-B) + P(A \cap B)$$

$$\text{Άρα } P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$



2007 επαναληπτικές

B. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

Μονάδες 4

Απάντηση:

► Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει:

$$\text{Πιθανότητα ενδεχομένου } A = P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοικών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i)  $P(\Omega)$  ii)  $P(\emptyset)$ .

Μονάδες 2

Απάντηση:

i)  $P(\Omega) = 1$

ii)  $P(\emptyset) = 0$

2008

α. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ο τύπος

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου

$\Omega$  είναι ισοπίθανα. Μονάδες 2

Λάθος

Σχόλιο: Δες σχολικό βιβλίο σ. 150 αρχή της παραγράφου Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων



## 2008 επαναληπτικές

### ΘΕΜΑ 1ο

**Β. β.** Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα;

**Μονάδες 3**

**Απάντηση:**

Όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο

$$A \cap B = \emptyset$$

Λέγονται επίσης ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.

2009

### ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Μονάδες 10**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αφού τα A και B ασυμβίβαστα (δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο) θα ισχύει

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \quad (1)$$

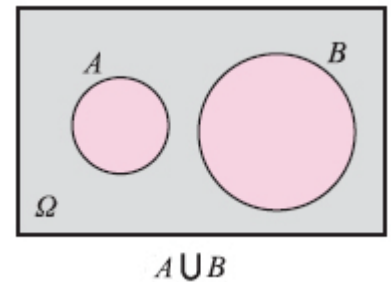
Διαιρώντας τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως (από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι **ανά δύο** ασυμβίβαστα θα έχουμε  $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$ .



**β.** Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ισχύει ότι  $A - B = A \cap B'$

**Μονάδες 2**

**Σωστό**

Σχόλιο: Σχολικό σ. 141

## ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ενός δειγματικού χώρου, ισχύει

$$P(A')=1-P(A)$$

**Μονάδες 9**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού τα ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά ισχύει  $A \cup A' = \Omega$

Επειδή  $A \cap A' = \emptyset$ , δηλαδή τα  $A$  και  $A'$  είναι ασυμβίβαστα, έχουμε

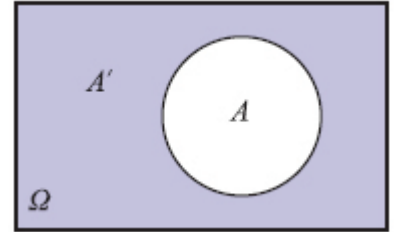
διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

$$\text{Οπότε } P(A') = 1 - P(A).$$



**ε.** Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

**Μονάδες 2**

**Σωστό**

## 2010

**A3.** Έστω  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να δώσετε τους ορισμούς του βέβαιου ενδεχομένου και του αδύνατου ενδεχομένου.

**Μονάδες 4**

Απάντηση

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο  $\Omega$ . Γι' αυτό το  $\Omega$  λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο  $\emptyset$  που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το  $\emptyset$  είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Σχόλιο: Σχολικό βιβλίο § 3.1 σ.140

## 2010 επαναληπτικές

**A3.** Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

**Απάντηση:**

**Δειγματικός χώρος** (sample space) ενός πειράματος τύχης λέγεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων. Συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα  $\Omega$ . Αν δηλαδή  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:  
 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ .

**ε)** Αν  $P(A)$  είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ , τότε

$$P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$$

**Μονάδες 10**

**Σωστό**

**Σχόλιο:** Σχολικό βιβλίο § 3.2 σ.149

## 2011

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδειχθεί ότι:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B).$$

**Μονάδες 7**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Επειδή τα ενδεχόμενα  $A-B$  και  $A \cap B$  είναι ασυμβίβαστα και

$A = (A-B) \cup (A \cap B)$ , έχουμε από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A) = P[(A-B) \cup (A \cap B)] = P(A-B) + P(A \cap B)$$

$$\text{Άρα } P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

**A2.** Πότε δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα; **Μονάδες 4**

**Απάντηση:**

Δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο  $A \cap B = \emptyset$

Λέγονται επίσης ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.

**A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Μονάδες 7**

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα  $N(A) + N(B)$  το πλήθος των στοιχείων του  $A \cap B$  υπολογίζεται δυο φορές.

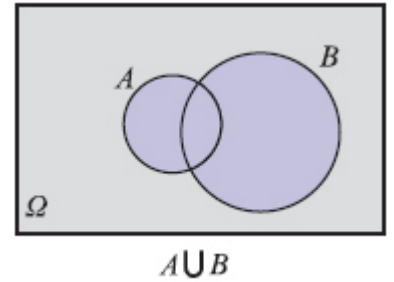
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως (από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).



**A2.** Έστω ένας δειγματικός χώρος  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας. **Μονάδες 4**

**Απάντηση:**

Εστω  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο  $\{\omega_i\}$  αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με  $P(\omega_i)$ , έτσι ώστε να ισχύουν:

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$$

Τον αριθμό  $P(\omega_i)$  ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου  $\{\omega_i\}$ .

Ως πιθανότητα  $P(A)$  ενός ενδεχομένου  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$  ορίζουμε το άθροισμα

$P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$ , ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου  $\emptyset$  ορίζουμε τον αριθμό

$$P(\emptyset) = 0$$

**A2.** Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A

**Μονάδες 4**

**Απάντηση:**

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Για ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει:

$$\text{Πιθανότητα ενδεχομένου } A = P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοικών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Ο κλασικός ορισμός πιθανότητας διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812

$$1. P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$2. P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3.  $0 \leq P(A) \leq 1$  αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

### 2012 επαναληπτικές

**γ)** Αν τα ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε ισχύει:

$$P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$

**Σωστό**

Σχόλιο: σ.150 σχολικό

**ε)** Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε το ενδεχόμενο A ∪ B πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.

**Σωστό**

## 2013 επαναληπτικές

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα  $A$  και  $A'$  ισχύει:  $P(A') = 1 - P(A)$

**Μονάδες 7**

**Απόδειξη**

Αφού τα ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά ισχύει  $A \cup A' = \Omega$

Επειδή  $A \cap A' = \emptyset$ , δηλαδή τα  $A$  και  $A'$  είναι ασυμβίβαστα, έχουμε

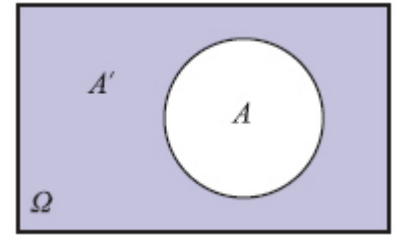
διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

$$\text{Οπότε } P(A') = 1 - P(A).$$



ε) Δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  λέγονται ασυμβίβαστα, όταν  $A \cap B \neq \emptyset$

**Λάθος**

**2013**

ε) Για δύο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  με  $A \subseteq B$ , ισχύει ότι  $P(A) > P(B)$  (μονάδες 2)

**Λάθος**

**2014**

β) Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει:

$$P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$$

**Λάθος**

**Σχόλιο** Το σωστό είναι  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ .

## 2014 Επαναληπτικές

**A1.** Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Μονάδες 7**

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$

αφού στο άθροισμα  $N(A) + N(B)$  το πλήθος των στοιχείων του  $A \cap B$  υπολογίζεται δυο φορές.

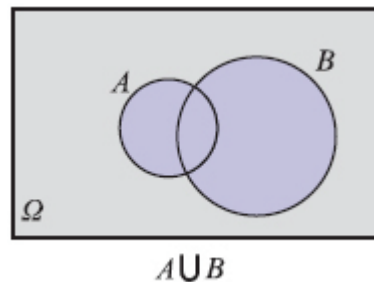
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως (από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).



**δ)** Το ενδεχόμενο  $A - B$  πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το  $A$  αλλά όχι το  $B$  (**μονάδες 2**)

**Σωστό**

Σχόλιο: σ.141 σχολικό

## 2015

**ε)** Αν  $A, B$  είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του  $A$  συνεπάγεται την πραγματοποίηση του  $B$ » δηλώνει ότι :  $A \subseteq B$ .

**Σωστό**

Σχόλιο: σ.141 σχολικό

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B , να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Μονάδες 7**

**Απόδειξη:**

Αφού τα A και B ασυμβίβαστα (δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο) θα ισχύει

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) \quad (1)$$

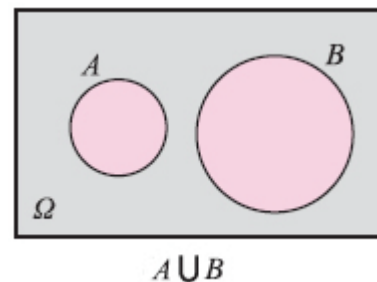
Διαιρώντας τα μέλη της (1) με  $N(\Omega)$  έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως (από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A, B και Γ είναι **ανά δύο** ασυμβίβαστα θα έχουμε  $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$ .



**ε)** Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ . Το ενδεχόμενο  $A \cup B$  πραγματοποιείται μόνο όταν τα A, B πραγματοποιούνται συγχρόνως.

**Μονάδες 2**

**Λάθος**