►Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της?

Απάντηση:

Μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

► Να δώσετε τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της

Απάντηση:

Παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίο ορισμού της, ονομάζεται το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{αν}$$

i) υπάρχει και

ii) είναι πραγματικός αριθμός

Συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται «έφ τονούμενο του x_0”

Εχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

► Για την συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-7)$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τον άξονα x'x

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τον άξονα των y'y

γ) Για ποιά x η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x'x

Απάντηση:

Θέτουμε αρχικά για διευκόλυνση $f(x)=y$ οπότε έχουμε $y=(x-3)(x-7)$.

α) Αφού τα σημεία του άξονα x'x έχουν τεταγμένη 0, θέτουμε y=0 και λύνουμε ως προς x:

$0=(x-3)(x-7) \Leftrightarrow (x-3)(x-7)=0 \Leftrightarrow x-3=0$ ή $x-7=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=7$

Αρα υπάρχουν δύο σημεία τομής που έχουν συντεταγμένες (3,0) και (7,0)

β) Γνωρίζουμε ότι τα σημεία του άξονα y'y έχουν τετμημένη 0.Αρα βάζοντας όπου x=0 βρίσκουμε

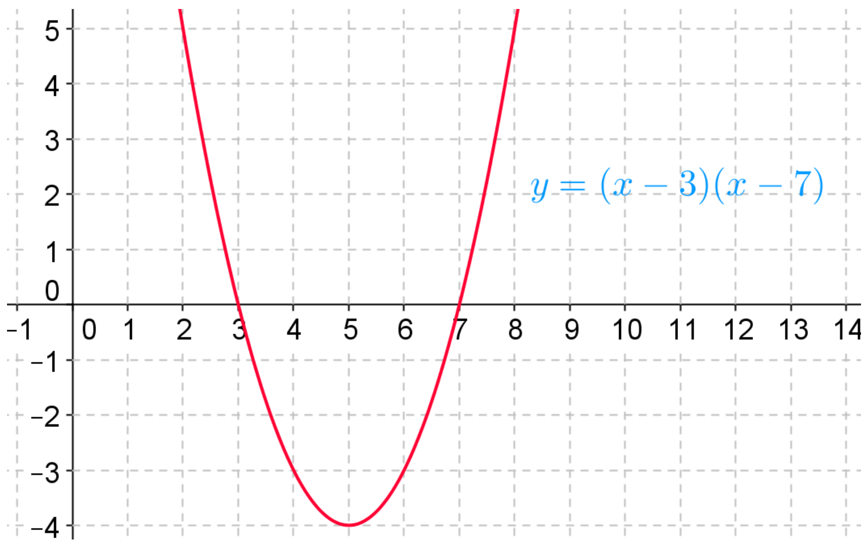
$y=(0-3)(0-7)=(-3)(-7)=21$

Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα y'y είναι το (0, 21).

Σημείωση: Από τον ορισμό της συνάρτησης μπορεί να υπάρχει το πολύ ένα σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των y.

γ) Κάτω από τον άξονα των x βρίσκονται τα αρνητικά y=f(x).Επομένως πρέπει να βρούμε τα x για τα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές δηλαδή να λύσουμε την ανίσωση:

$f(x)<0 \Leftrightarrow (x-3)(x-7)<0 \Leftrightarrow 3<x<7$

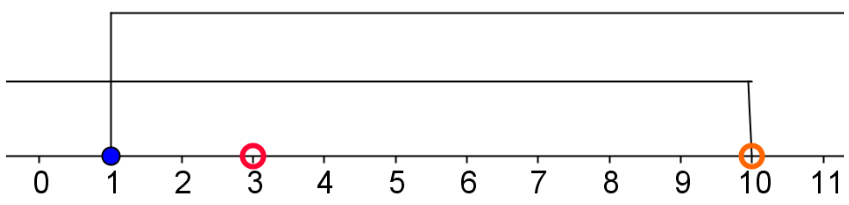


► Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+\ln(10-x)}{x-3}$$

Απάντηση:

Πρέπει $\left.\begin{matrix} x-3\neq 0 \\ x-1\geq 0 \\ 10-x>0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\neq 3 \\ x\geq 1 \\ 10>x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x\in[1,3)\cup(3,10)$



► Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

- $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+5x-1)=2\cdot 3^2+5\cdot 3-1=2\cdot 9+15-1=18+15-1=33-1=32$

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$. *Αν εδώ πάμε να αντικαταστήσουμε όπως προηγουμένως όπου x=3 βρίσκουμε* $\frac{0}{0}$ *οπότε προχωρούμε ως εξής:*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

► Να γίνουν οι παρακάτω παραγωγίσεις:

Για κάθε σταθερό αριθμό c, $(c)'=0$. Για παράδειγμα $(5)'=0$

$(x)'=1$

$(x^3)'=3x^2$

$(x^5)'=5x^4$

$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

$(e^x)'=e^x$ Η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι ο εαυτός της!

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\quad x>0$

	Κανόνες παραγώγισης
1	$(cf(x))'=cf'(x)$
2	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
3	$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

► Να γίνουν οι παρακάτω παραγωγίσεις με την βοήθεια των πιο πάνω κανόνων παραγώγισης:

$(5x^2)'=5(x^2)'=5\cdot 2x=10x$

$(x^3+x-2)'=(x^3)'+(x)'-(2)'=3x^2+1-0=3x^2+1$

$(x\cdot\ln x)'=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$(x^2\cdot\eta\mu x)'=(x^2)'\cdot\eta\mu x+x\cdot(\eta\mu x)'=2x\cdot\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$

► Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ στο σημείο (1, f(1)).

Λύση:

$f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της f.

$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2\right)'=\frac{1}{2}2x=x$ δηλαδή $f'(x)=x$ (1)

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής y=λx+β όπου λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ο λ είναι ίσος με την παράγωγο της f στο 1, οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $f'(1)=1$

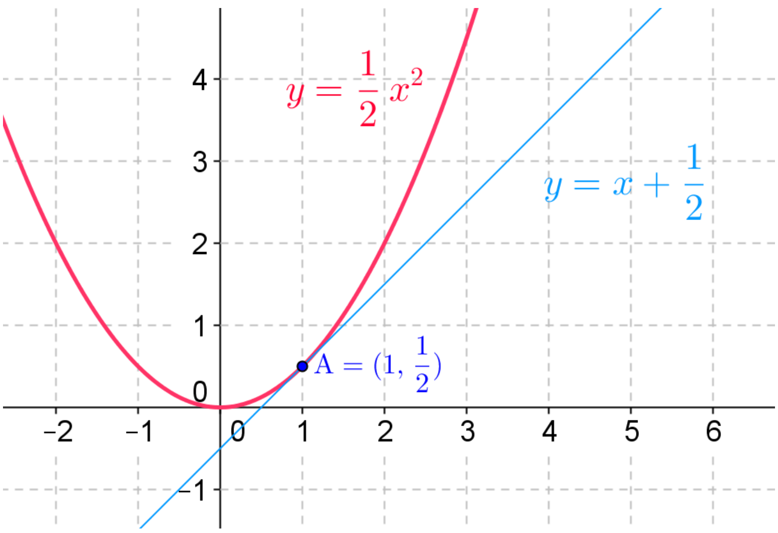
Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y=1x+\beta \Leftrightarrow y=x+\beta$ και απομένει πλέον να υπολογίσουμε το β.

Επειδή το σημείο επαφής (1,f(1))=(1, $\frac{1}{2}$) είναι σημείο της εφαπτομένης, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης

Αρα $\frac{1}{2}=1+\beta \Leftrightarrow 1+\beta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{2}-1 \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{2}-\frac{2}{2} \Leftrightarrow \beta=-\frac{1}{2}$

Αρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (1,f(1)) είναι:

$y=x-\frac{1}{2}$



ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

α) Να βρεθεί η παράγωγος της f. (Μονάδες 5)

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 15)

γ) Να βρεθούν τα ακρότατα της f. (Μονάδες 5)

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (1,f(1))

ΛΥΣΗ:

α) $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 6)' = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 12 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$

Βρίσκουμε τις ρίζες της παραγώγου:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\alpha=1$, $\beta=-1$ $\gamma=-2$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$

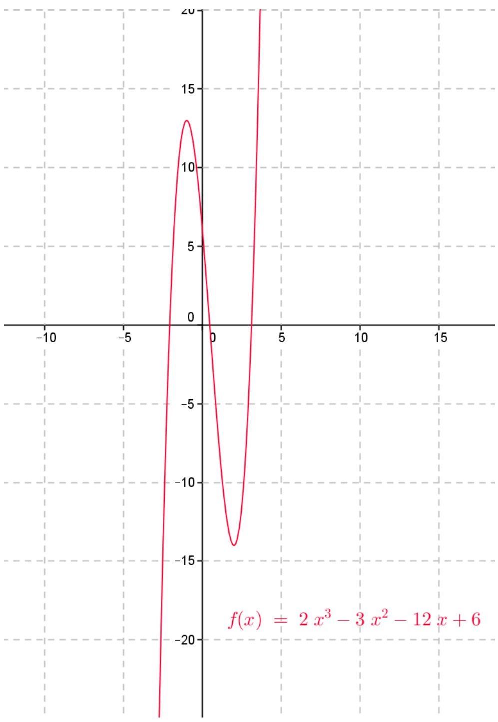
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Σχηματίζουμε πινακάκι όπου φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου.Επειδή 6>0 το πρόσημο της παραγώγου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 2$ που από την Α Λυκείου γνωρίζουμε ότι έξω από τις ρίζες γίνεται ομόσημο του α=1, δηλαδή θετικό και ανάμεσα στις ρίζες ετερόσημο του α=1, δηλαδή αρνητικό.

x	-∞		-1		2		∞
$f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$		+	0	-	0	+	
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$		↗		↘		↗	

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$
- Γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 2]$
- Γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$



γ) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=-1 το οποίο είναι ίσο με:

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 6 = -2 - 3 + 12 + 6 = 13$$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=2 το οποίο είναι ίσο με:

$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 6 = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 - 24 + 6 = 16 - 12 - 24 + 6 = -14$$

δ) Ξαναγράφω για εύκολη αναφορά τους τύπους των $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ και $f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$

Αρχικά βρίσκουμε:

$$f(1) = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 6 = 2 - 3 - 12 + 6 = 8 - 15 = -7$$

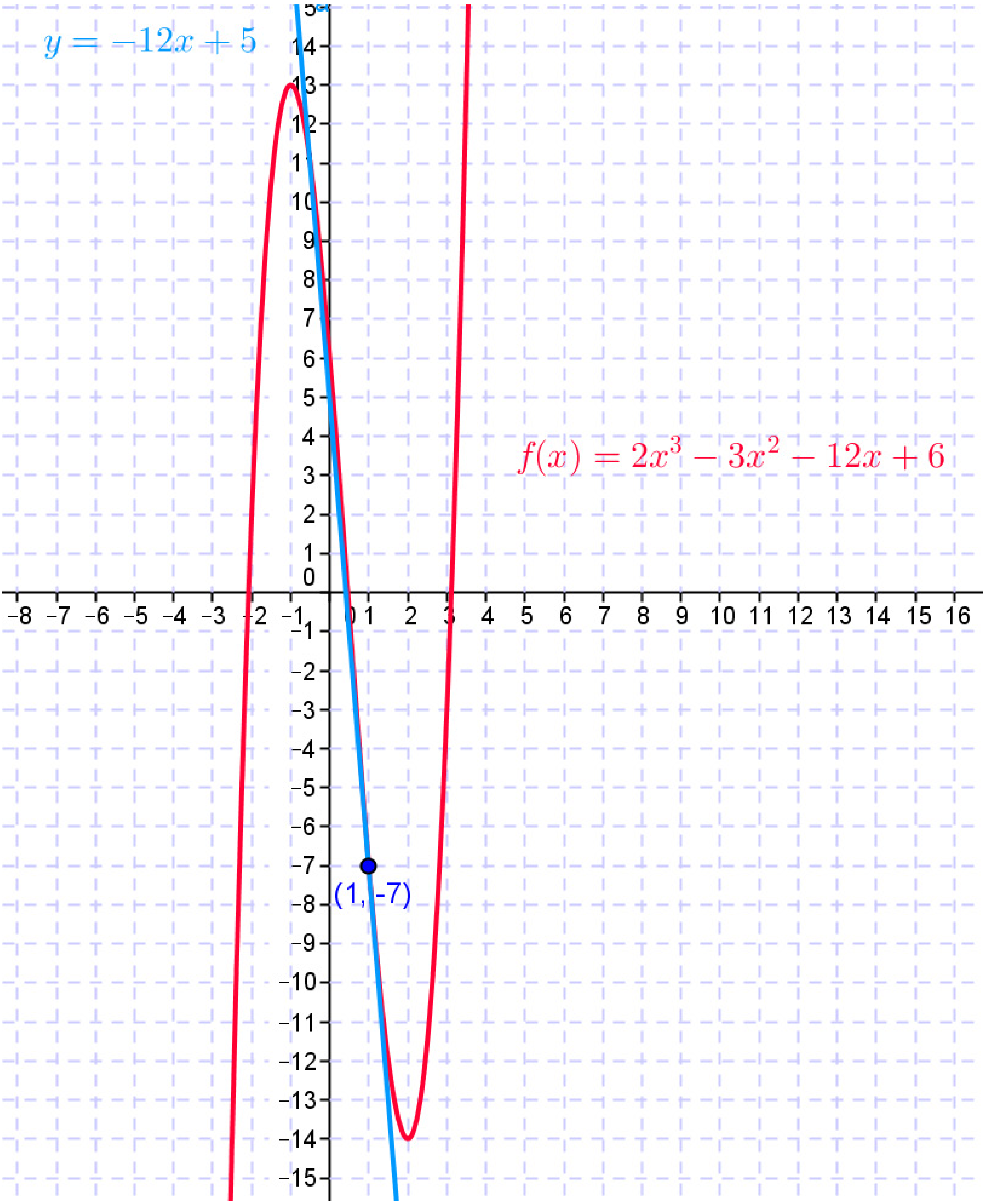
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής y=λx+β όπου λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης που είναι ίσος με $f'(1) = 6(1^2 - 1 - 2) = 6(-2) = -12$

Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται y=-12x+β και απομένει να υπολογίσουμε το β.

Επειδή το σημείο επαφής (1,f(1))=(1, -7) είναι σημείο της εφαπτομένης, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης

Αρα $-7 = -12\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -7 = -12 + \beta \Leftrightarrow -12 + \beta = -7 \Leftrightarrow \beta = 12 - 7 \Leftrightarrow \beta = 5$

Αρα y=-12x+5 η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης.


$y = -12x + 5$
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$
(1, -7)
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 −1 −2 −3 −4 −5 −6 −7 −8 −9 −10 −11 −12 −13 −14 −15