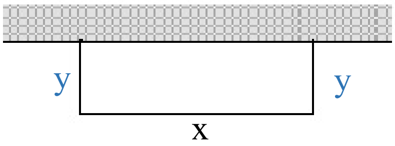
Προβλήματα στα οποία πρέπει να εκφράσουμε ένα μέγεθος ως συνάρτηση κάποιου άλλου

Version (21-9-2015)

B2. Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100 m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x, να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του x.



Λύση:

Αν y m η άλλη πλευρά του ορθογωνίου, τότε από τα δεδομένα ισχύει:

$$x+2y=100 \Leftrightarrow 2y=100-x \Leftrightarrow y=\frac{100-x}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του θα είναι:

$$\mathrm{E}(x)=x\left(50-\frac{x}{2}\right) \text{ με } 0<x<100$$

<u>**Σημείωση**</u>: Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού $(0,\ 100)$ δεν καθορίζεται από περιορισμούς του τύπου της συνάρτησης, αλλά από φυσικούς περιορισμούς αφού το μήκος είναι θετικό και θα είναι μικρότερο του μήκους του συρματοπλέγματος.

▪ Παραλλαγή διατύπωσης για το πεδίο ορισμού:

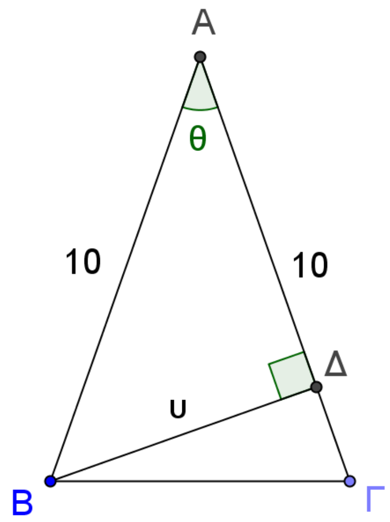
Κάποιος μπορεί να πεί το x>0 (1) ως μήκος, αλλά για τον ίδιο λόγο και το y>0:

$$y>0 \Leftrightarrow \frac{100-x}{2}>0 \Leftrightarrow 100-x>0 \Leftrightarrow 100>x \Leftrightarrow x<100 \ \ (2)$$

Τις δύο ανισότητες (1) και (2) τις γράφουμε σαν μία:

$0<x<100$ και το πεδίο ορισμού είναι το $(0,\ 100)$.

Β4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ=ΑΓ=10. Αν $A\hat{B}\Gamma = \theta$



i) να εκφράσετε το ύψος υ του τριγώνου από την κορυφή Β,

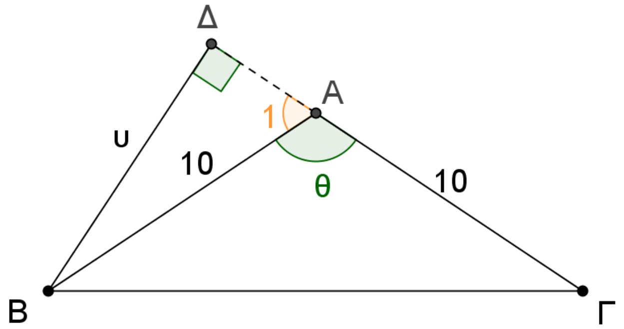
ii) να εκφράσετε εμβαδόν του ως συνάρτηση του θ.

Λύση:

i) ▪ Αν η γωνία είναι οξεία έχουμε (στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ)

$$\eta\mu\theta = \frac{\upsilon}{10} \Leftrightarrow \upsilon = 10\eta\mu\theta$$

▪ Αν η γωνία είναι αμβλεία τότε (στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ) έχουμε:



$$\eta\mu\hat{A}_1 = \frac{\upsilon}{10} \Leftrightarrow \upsilon = 10\cdot\eta\mu\hat{A}_1$$

Ομως $\hat{A}_1 = 180° - \theta$ οπότε:

$$\upsilon = 10\cdot\eta\mu(180° - \theta)$$

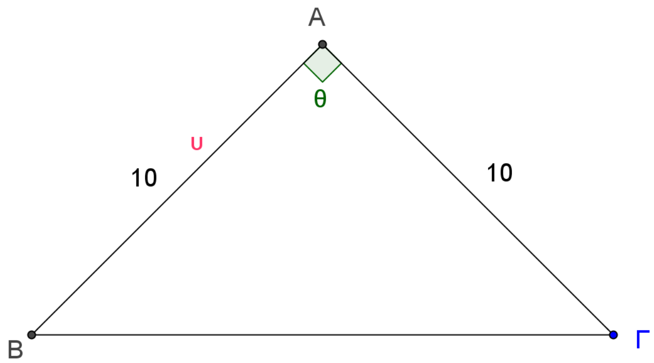
Γνωρίζουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο οπότε:

$$\eta\mu(180° - \theta) = \eta\mu\theta$$

Αρα και σε αυτό το σχήμα $\upsilon = 10\cdot\eta\mu\theta$

▪ Οταν η γωνία θ είναι ορθή ($90°$) τότε το ύψος από την κορυφή Β ταυτίζεται με την κάθετη πλευρά ΒΑ

Αρα $\upsilon = \mathrm{BA} = 10 = 10\cdot 1 = 10\cdot\eta\mu 90°$



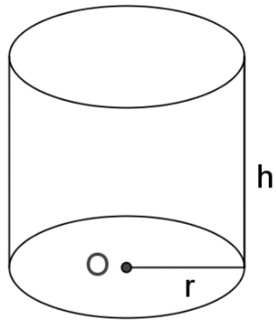
Αρα και σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι $\upsilon = 10\cdot\eta\mu\theta$

● Οπότε σε κάθε περίπτωση $\upsilon = 10\cdot\eta\mu\theta$.

ii) Εχουμε $\mathrm{E}(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\upsilon = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\eta\mu\theta = 50\cdot\eta\mu\theta$, $0 < \theta < 180°$

__Σημείωση__: Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού $(0,\ 180°)$ δεν καθορίζεται από περιορισμούς του τύπου της συνάρτησης, αλλά από φυσικούς περιορισμούς αφού μια γωνία τριγώνου είναι θετική και μικρότερη από $180°$.

B3. Ένα κυλινδρικό φλυτζάνι, ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm.



Αν το φλυτζάνι έχει ύψος h cm, και η η ακτίνα της βάσης του είναι r cm τότε:

α) να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του h.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως συνάρτηση του r.

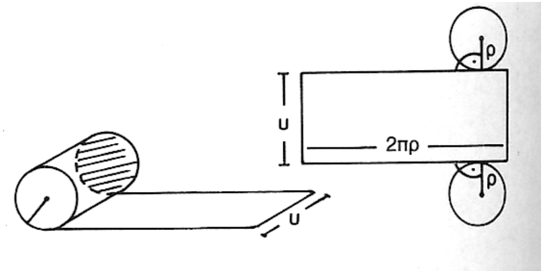
Υπενθυμίσεις:

● Εμβαδό κύκλου $= \pi r^2$, Μήκος κύκλου$=2\pi r$

● Ογκος κυλίνδρου = Εμβαδό βάσης $\cdot$ ύψος δηλαδή

$V=\pi r^2 h$

● Στο δίπλα σχήμα φαίνεται το ανάπτυγμα της επιφάνειας ενός κυλίνδρου *(από το παλιό βιβλίο της Β Γυμνασίου)*.Εδώ η ακτίνα συμβολίζεται με ρ και το ύψος με υ αντί r και h αντίστοιχα.



Λύση:

α) Το μήκος της βάσης του κυλίνδρου είναι 2πr και σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε:

$2\pi r + h = 20 \quad (1)$

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 \cdot h \quad (2)$

Από την (1) έχουμε:

$r = \dfrac{20-h}{2\pi}$, οπότε η (2) γίνεται:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \left(\frac{20-h}{2\pi}\right)^2 \cdot h \,, \qquad 0 < h < 20$$

Σημείωση: Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού δεν καθορίζεται από περιορισμούς του τύπου της συνάρτησης αλλά από φυσικούς περιορισμούς.

Προφανώς αφού το h εκφράζει μήκος είναι h>0.Και από την $2\pi r + h = 20$ προκύπτει ότι h<20

Αν θέλει κάποιος μπορεί να το βρεί και ως εξής:

Αφού και το r μήκος, θα είναι θετικός $r > 0 \Leftrightarrow \dfrac{20-h}{2\pi} > 0 \Leftrightarrow 20 - h > 0 \Leftrightarrow h < 20$

β) Η επιφάνεια της βάσης του κυλίνδρου είναι $\mathrm{E}_1 = \pi r^2$

Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ορθογώνιο με διαστάσεις $2\pi r$ και h.

Αρα το εμβαδόν της είναι $\mathrm{E}_2 = 2\pi r h$

Επομένως; η επιφάνεια του ανοιχτού κυλίνδρου είναι

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Θέλουμε να την εκφράσουμε ως συνάρτηση μόνο του r, οπότε από την $2\pi r + h = 20 \Leftrightarrow h = 20 - 2\pi r$

οπότε:

$$\mathrm{E}(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r(20 - 2\pi r) \text{ με } r>0$$

Αφού και $h > 0 \Leftrightarrow 20 - 2\pi r > 0 \Leftrightarrow 2\pi r < 20 \Leftrightarrow r < \dfrac{10}{\pi}$.

Αρα τελικά $\mathrm{E}(r) = \pi r^2 + 2\pi r(20 - 2\pi r), \quad 0 < r < \dfrac{10}{\pi}$

__Σημείωση__: Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού δεν καθορίζεται από περιορισμούς του τύπου της συνάρτησης αλλά από φυσικούς περιορισμούς.