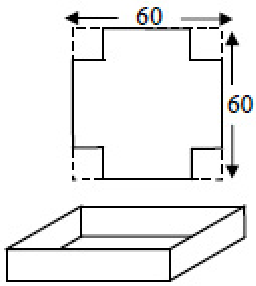
**Β3.** Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60 cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.

Λύση:




Αν $x$ είναι το μήκος της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, τότε η βάση του δοχείου θα είναι τετράγωνο πλευράς $(60-2x)$cm και το ύψος του $x$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.Προφανώς θα είναι $x>0$ και $2x<60 \Leftrightarrow x<30$ και τελικά $0<x<30$.

Αρα ο όγκος του δοχείου θα είναι:

$$V(x)=(60-2x)^2 x \quad 0<x<30$$

Η συνάρτηση $V(x)$ έχει πεδίο ορισμού $(0,\ 30)$ (που δεν επιβάλλεται από τον τύπο της αλλά από την φυσική πραγματικότητα). Ζητάμε λοιπόν το μέγιστο της $V(x)$.

$$V'(x)=\left[(60-2x)^2\cdot x\right]'=\left[(60-2x)^2\right]' x+(60-2x)^2(x)'=$$ *(εφαρμόσαμε τον κανόνα παραγώγισης γινομένου)*

$$2(60-2x)(60-2x)' x+(60-2x)^2\cdot 1=$$ *(παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης)*

$$2x(60-2x)(-2)+(60-2x)^2=-4x(60-2x)+(60-2x)^2=(60-2x)(-4x+60-2x)=(60-2x)(-6x+60)$$

Το $V'(x)$ είναι ένα παραγοντοποιημένο τριώνυμο κι έτσι μπορούμε εύκολα να βρούμε τις ρίζες του:

$$V'(x)=0 \Leftrightarrow (60-2x)(-6x+60)=0 \Leftrightarrow 60-2x=0 \text{ ή } -6x+60=0 \Leftrightarrow x=\frac{60}{2}=30 \text{ ή } x=\frac{60}{6}=10$$

Η τιμή 30 απορρίπτεται αφού δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συναρτησης.

Το α του τριωνύμου ( ο συντελεστής του $x^2$ ) είναι το γινόμενο των συντελεστών του x σε κάθε διωνυμικό παράγοντα δηλαδή $(-2)(-6)=12$

Αρα σύμφωνα με την θεωρία που διδαχτήκαμε στην Α Λυκείου το τριώνυμο έξω από τις ρίζες θα είναι ομόσημο του α δηλαδή εδώ θετικό και ανάμεσα στις ρίζες ετερόσημο του α δηλαδή αρνητικό.

Μπορούμε πλέον να καταστρώσουμε το πινακάκι που μας δίνει την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

| $x$ | 0 | | 10 | | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $V(x)$ | 0 | ↗ | f(10) = 16.000<br>μέγιστο | ↘ | 0 |

$$V(10)=(60-2\cdot 10)^2 10=(60-20)^2\cdot 10=40^2\cdot 10=1600\cdot 10=16000\ cm^3=16\ \mathrm{d}m^3$$

*β' τρόπος (μάλλον πιο απλός)*

$$V(x)=(60-2x)^2\cdot x=\left[60^2-2\cdot 60\cdot 2x+(2x)^2\right]\cdot x=\left(3600-240x+4x^2\right)\cdot x=$$

$$4x^3-240x^2+3600x$$

$$V'(x)=\left(4x^3-240x^2+3600x\right)'=12x^2-480x+3600=12\left(x^2-40x+300\right)$$

Βρίσκω τις ρίζες του τριωνύμου $x^2-40x+300$.

$$\Delta=(-40)^2-4\cdot 1\cdot 300=1600-1200=400$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{40\pm 20}{2}$$

$x_1=\dfrac{40+20}{2}=\dfrac{60}{2}=30$ απορρίπτεται αφού το x=30 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού.

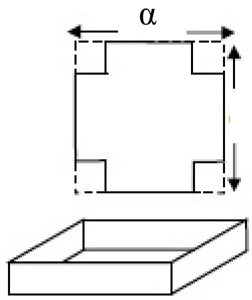
$$x_2=\frac{40-20}{2}=\frac{20}{2}=10$$

**Β3. γενίκευση**

**Β3.** Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς **α** cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.

Λύση:

Αν $x$ είναι το μήκος της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, τότε η




*β' τρόπος (μάλλον πιο απλός)*

$$V(x)=(\alpha-2x)^2\cdot x=\left[\alpha^2-2\cdot\alpha\cdot 2x+(2x)^2\right]\cdot x=\left(\alpha^2-4\alpha x+4x^2\right)\cdot x=\alpha^2x-4\alpha x^2+4x^3$$

Προφανώς πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \alpha-2x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x>0 \\ \dfrac{\alpha}{2}>x \end{array}\right\} \Leftrightarrow 0<x<\frac{\alpha}{2}$$

$$V'(x)=\left(\alpha^2x-4\alpha x^2+4x^3\right)'=\alpha^2-8\alpha x+12x^2=12x^2-8\alpha x+\alpha^2$$

Βρίσκω τις ρίζες του τριωνύμου $12x^2-8\alpha x+\alpha^2$.

$$\Delta=(-8\alpha)^2-4\cdot 12\cdot\alpha^2=64\alpha^2-48\alpha^2=16\alpha^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{8\alpha\pm 4\alpha}{2\cdot 12}$$

$$x_1=\frac{8\alpha+4\alpha}{24}=\frac{12\alpha}{24}=\frac{\alpha}{2} \text{ απορρίπτεται αφού } x<\frac{\alpha}{2}$$

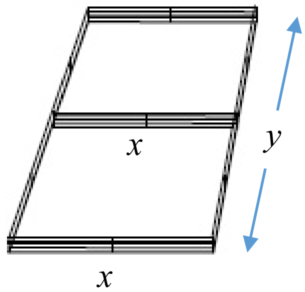
$$x_2=\frac{8\alpha-4\alpha}{24}=\frac{4\alpha}{24}=\frac{\alpha}{6}$$

$$V\left(\frac{\alpha}{6}\right)=\left(\alpha-2\frac{\alpha}{6}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{6}=\left(\alpha-2\frac{\alpha}{6}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{6}=\left(\alpha-\frac{\alpha}{3}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{6}=\left(\frac{3\alpha-\alpha}{3}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{6}=\left(\frac{2\alpha}{3}\right)^2\cdot\frac{\alpha}{6}=$$

$$\frac{4\alpha^2}{9}\cdot\frac{\alpha}{6}=\frac{2\alpha^3}{9\cdot 3}=\frac{2\alpha^3}{27}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{\alpha}{6}$ | | $\frac{\alpha}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $V(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\boxed{V\left(\frac{\alpha}{6}\right)=\frac{2\alpha^3}{27}=2\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3}$ | $\searrow$ | $0$ |

**B4.** Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή 16.000 $m^2$ σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράχτης για την περίφραξη κοστίζει 900 δρχ./m και ο φράχτης για το χώρισμα 600 δρχ./m.




Να βρείτε ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε, να έχουμε το ελάχιστο κόστος για την περίφραξη μαζί με το χώρισμα.

Λύση: (γενίκευση)

Εστα Ε $m^2$ το εμβαδό του ορθογωνίου.Εστω ότι η περίφραξη κοστίζει **α** €/m (το **α** από το ακριβό) και το χώρισμα **φ** €/m (το φ από το φθηνό)

Εστω $x$ το πλάτος και y το μήκος του ορθογωνίου (x η διάσταση η παράλληλη προς το χώρισμα).Τότε η περίμετρός του είναι Π=2$x$+2$y$ *και το κόστος της περίφραξης* $(2x+2y)\alpha$.Το κόστος του χωρίσματος είναι $\varphi x$.

Αρα το συνολικό κόστος είναι $\mathrm{K}=(2x+2y)\alpha+\varphi x$ €

$$xy=\mathrm{E}\Leftrightarrow y=\frac{\mathrm{E}}{x}$$

$$\mathrm{K}(x)=\left(2x+2\frac{\mathrm{E}}{x}\right)\alpha+\varphi x=2\alpha x+\frac{2\mathrm{E}\alpha}{x}+\varphi x=(2\alpha+\varphi)x+\frac{2\mathrm{E}\alpha}{x}$$

$$\mathrm{K}'(x)=2\alpha+\varphi-\frac{2\mathrm{E}\alpha}{x^2}$$

$$\mathrm{K}'(x)=0\Leftrightarrow 2\alpha+\varphi-\frac{2\mathrm{E}\alpha}{x^2}=0\Leftrightarrow 2\alpha+\varphi=\frac{2\mathrm{E}\alpha}{x^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{2\mathrm{E}\alpha}{2\alpha+\varphi}\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2\mathrm{E}\alpha}{2\alpha+\varphi}}$$

$$y=\frac{\mathrm{E}}{x}=\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\frac{2\mathrm{E}\alpha}{2\alpha+\varphi}}}=\frac{\mathrm{E}\sqrt{2\alpha+\varphi}}{\sqrt{2\mathrm{E}\alpha}}=\frac{\sqrt{\mathrm{E}}\sqrt{2\alpha+\varphi}}{\sqrt{2\alpha}}=$$

*Επαλήθευση για E=16000 α=9 και φ=6*

$$x=\sqrt{\frac{2\mathrm{E}\alpha}{2\alpha+\varphi}}=\sqrt{\frac{2\cdot 16000\cdot 900}{1800+600}}=\sqrt{\frac{2\cdot 16000\cdot 900}{2400}}=\sqrt{\frac{2\cdot 16000\cdot 9}{24}}=\sqrt{\frac{2\cdot 16000\cdot 3}{8}}=$$

$$\sqrt{\frac{16000\cdot 3}{4}}=\sqrt{4000\cdot 3}=\sqrt{400\cdot 30}=20\sqrt{30}$$

**Β5.** Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ να εγγράψετε το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

Λύση:

Αν x και y είναι οι πλευρές του ορθογωνίου , τότε το εμβαδόν του είναι Ε=xy.

Επειδή η γωνία του ορθογωνίου είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και ορθή, το τόξο στο οποίο βαίνει θα είναι 180 μοίρε οπότε η αντίστοιχη χορδή θα είναι διάμετρος του κύκλου.

Τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$x^2+y^2=4\rho^2$ οπότε $y=\sqrt{4\rho^2-x^2}$ (1) .Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου εκφράζεται ως συνάρτηση του x με τον τύπο:

$$\mathrm{E}(x)=x\sqrt{4\rho^2-x^2} \qquad 0<x<2\rho$$

$$\mathrm{E}'(x)=\left(x\sqrt{4\rho^2-x^2}\right)'=(x)'\sqrt{4\rho^2-x^2}+x\left(\sqrt{4\rho^2-x^2}\right)'=\sqrt{4\rho^2-x^2}+x\frac{\left(4\rho^2-x^2\right)'}{2\sqrt{4\rho^2-x^2}}=$$

$$\sqrt{4\rho^2-x^2}+x\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\sqrt{4\rho^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\frac{\left(\sqrt{4\rho^2-x^2}\right)^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}$$

$$\frac{4\rho^2-x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\frac{4\rho^2-x^2-x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\frac{4\rho^2-2x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}$$

$$\mathrm{E}'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4\rho^2-2x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}=0\Leftrightarrow 4\rho^2-2x^2=0\Leftrightarrow 2x^2=4\rho^2\Leftrightarrow x^2=2\rho^2\Leftrightarrow x=\sqrt{2\rho^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\rho$$

$$\mathrm{E}'(x)>0\Leftrightarrow\frac{4\rho^2-2x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}>0\overset{\substack{\text{Η ρίζα στο παρονομαστή είναι}\\ \text{θετικός αριθμός}}}{\Leftrightarrow} 4\rho^2-2x^2>0\Leftrightarrow 2x^2<4\rho^2\Leftrightarrow x^2<2\rho^2\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2}<\sqrt{2\rho^2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<\sqrt{2}\rho$$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{2}\rho$ | | $2\rho$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{E}'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\mathrm{E}(x)$ | | $\nearrow$ | $\mathrm{E}_{\max}\left(\sqrt{2}\rho\right)=2\rho^2$ | $\searrow$ | |

Επομένως για $x=\sqrt{2}\rho$ το ορθογώνιο έχει το μέγιστο εμβαδό που είναι:

$$\mathrm{E}_{\max}\left(\sqrt{2}\rho\right)=\sqrt{2}\rho\sqrt{4\rho^2-\left(\sqrt{2}\rho\right)^2}=\sqrt{2}\rho\sqrt{4\rho^2-2\rho^2}=\sqrt{2}\rho\sqrt{2\rho^2}=\sqrt{2}\rho\sqrt{2}\rho=2\rho^2$$

Οταν όμως $x=\sqrt{2}\rho$ τότε από την (1) έχουμε: $y=\sqrt{4\rho^2-\left(\sqrt{2}\rho\right)^2}=\sqrt{4\rho^2-2\rho^2}=\sqrt{2\rho^2}=\sqrt{2}\rho$

Δηλαδή y=x οπότε από όλα τα ορθογώνια που μπορούν να εγγραφούν σε έναν κύκλο ακτίνας ρ, **το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.**

**Β6.** Ένα σύρμα μήκους λ κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

Λύση:

Αν x είναι το μήκος του κύκλου τότε η περίμετρος του τετραγώνου είναι $\lambda-x$ .

Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου τότε έχουμε $x=2\pi\rho \Leftrightarrow \rho=\dfrac{x}{2\pi}$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο τμημάτων είναι

$$\mathrm{E}=\pi\rho^2+\left(\frac{\lambda-x}{4}\right)^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{\lambda-x}{4}\right)^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{\lambda-x}{4}\right)^2=\pi\frac{x^2}{4\pi^2}+\frac{(\lambda-x)^2}{16}=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(\lambda-x)^2}{16}$$

Αρα το άθροισμα των εμβαδών ως συνάρτηση του x γράφεται:

$$\mathrm{E}(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(\lambda-x)^2}{16} \quad \text{με } 0\le x\le \lambda$$

$$\mathrm{E}'(x)=\left[\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(\lambda-x)^2}{16}\right]'=\frac{2x}{4\pi}+\frac{2(\lambda-x)(\lambda-x)'}{16}=\frac{x}{2\pi}+\frac{(\lambda-x)(-1)}{8}=\frac{x}{2\pi}+\frac{x-\lambda}{8}=\frac{4x}{8\pi}+\frac{(x-\lambda)\pi}{8\pi}$$

$$=\frac{4x}{8\pi}+\frac{(x-\lambda)\pi}{8\pi}=\frac{4x+x\pi-\lambda\pi}{8\pi}=\frac{(4+\pi)x-\lambda\pi}{8\pi}$$

$$\mathrm{E}'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x}{2\pi}+\frac{x-\lambda}{8}=0\Leftrightarrow \frac{(4+\pi)x-\lambda\pi}{8\pi}=0\Leftrightarrow (4+\pi)x-\lambda\pi=0\Leftrightarrow x=\frac{\lambda\pi}{4+\pi}$$

$$\mathrm{E}'(x)>0\Leftrightarrow \frac{(4+\pi)x-\lambda\pi}{8\pi}>0\Leftrightarrow (4+\pi)x-\lambda\pi>0\Leftrightarrow x>\frac{\lambda\pi}{4+\pi}$$

| $x$ | $0$ | $\frac{\lambda\pi}{4+\pi}$ | $\lambda$ |
|---|---|---|---|
| $E'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $E(x)$ | $\frac{\lambda^2}{16}$ ↘ | $E_{\min}\left(\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)=\frac{\lambda^2}{4(4+\pi)}$ | ↗ $\frac{\lambda^2}{4\pi}$ |

$$E\left(\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)=\left(\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)^2\frac{1}{4\pi}+\frac{\left(\lambda-\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)^2}{16}=\frac{\lambda^2\pi^2}{(4+\pi)^2}\frac{1}{4\pi}+\frac{\left(\frac{\lambda(4+\pi)}{4+\pi}-\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)^2}{16}=\frac{\lambda^2\pi}{4(4+\pi)^2}+\frac{\left(\frac{4\lambda}{4+\pi}\right)^2}{16}$$

$$=\frac{\lambda^2\pi}{4(4+\pi)^2}+\frac{\frac{16\lambda^2}{(4+\pi)^2}}{16}=\frac{\lambda^2\pi}{4(4+\pi)^2}+\frac{16\lambda^2}{16(4+\pi)^2}=\frac{\lambda^2\pi}{4(4+\pi)^2}+\frac{4\lambda^2}{4(4+\pi)^2}=\frac{\lambda^2(\pi+4)}{4(4+\pi)^2}=\frac{\lambda^2}{4(4+\pi)}$$

Η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta=2\rho=2\frac{x}{2\pi}=\frac{x}{\pi}=\frac{\frac{\lambda\pi}{4+\pi}}{\pi}=\frac{\lambda\pi}{\pi(4+\pi)}=\frac{\lambda}{4+\pi}$

και η πλευρά του τετραγώνου είναι επίσης:

$$\alpha=\frac{\lambda-x}{4}=\frac{1}{4}\left(\lambda-\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)=\frac{1}{4}\left(\lambda-\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda(4+\pi)}{4+\pi}-\frac{\lambda\pi}{4+\pi}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{4\lambda+\lambda\pi-\lambda\pi}{4+\pi}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{4\lambda}{4+\pi}\right)=\frac{\lambda}{4+\pi}$$

**B7.**. Η έρευνα έχει δείξει ότι αν σε έναν ασθενή γίνει μια υποδόρια ένεση, τότε ύστερα από χρόνο t η συγκέντρωση y του φαρμάκου στο αίμα του δίνεται από τη συνάρτηση $y(t)=\frac{A}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1 t}-e^{-k_2 t}\right)$ όπου A, $k_1$ και $k_2$ θετικές σταθερές με $k_2 > k_1$. Να βρείτε το χρόνο t στον οποίο το φάρμακο θα παρουσιάσει τη μέγιστη συγκέντρωση.

Λύση:

$$y'(t)=\left[\frac{A}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1 t}-e^{-k_2 t}\right)\right]'=\frac{A}{k_2-k_1}\left[\left(e^{-k_1 t}-e^{-k_2 t}\right)\right]'=\frac{A}{k_2-k_1}\left[e^{-k_1 t}\left(-k_1 t\right)'-e^{-k_2 t}\left(-k_2 t\right)'\right]$$

$$=\frac{A}{k_2-k_1}\left[e^{-k_1 t}\left(-k_1\right)-e^{-k_2 t}\left(-k_2\right)\right]=\frac{A}{k_2-k_1}\left(-k_1 e^{-k_1 t}+k_2 e^{-k_2 t}\right)$$

$$y'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{A}{k_2-k_1}\left(-k_1 e^{-k_1 t}+k_2 e^{-k_2 t}\right)=0 \Leftrightarrow -k_1 e^{-k_1 t}+k_2 e^{-k_2 t}=0 \Leftrightarrow k_2 e^{-k_2 t}=k_1 e^{-k_1 t} \Leftrightarrow \frac{e^{-k_2 t}}{e^{-k_1 t}}=\frac{k_1}{k_2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-k_2 t-(-k_1 t)}=\frac{k_1}{k_2} \Leftrightarrow e^{-k_2 t+k_1 t}=\frac{k_1}{k_2} \Leftrightarrow -k_2 t+k_1 t=\ln\frac{k_1}{k_2} \Leftrightarrow t\left(k_1-k_2\right)=\ln\frac{k_1}{k_2} \Leftrightarrow t=\frac{1}{k_1-k_2}\ln\frac{k_1}{k_2}$$

$$y'(t)>0 \Leftrightarrow \frac{A}{k_2-k_1}\left(-k_1 e^{-k_1 t}+k_2 e^{-k_2 t}\right)>0 \overset{\substack{A>0\\k_2>k_1}}{\Leftrightarrow} -k_1 e^{-k_1 t}+k_2 e^{-k_2 t}>0 \Leftrightarrow k_2 e^{-k_2 t}>k_1 e^{-k_1 t} \overset{\substack{k_2>0\\e^{-k_1 t}>0}}{\Leftrightarrow} \frac{e^{-k_2 t}}{e^{-k_1 t}}>\frac{k_1}{k_2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-k_2 t-(-k_1 t)}>\frac{k_1}{k_2} \Leftrightarrow e^{-k_2 t+k_1 t}>\frac{k_1}{k_2} \overset{\ln\ \text{γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} -k_2 t+k_1 t>\ln\frac{k_1}{k_2} \Leftrightarrow t\left(k_1-k_2\right)>\ln\frac{k_1}{k_2} \overset{\substack{k_2>k_1\Leftrightarrow\\k_1-k_2<0}}{\Leftrightarrow} t<\frac{1}{k_1-k_2}\ln\frac{k_1}{k_2}$$

Σημείωση $\frac{1}{k_1-k_2}\ln\frac{k_1}{k_2}=\frac{1}{k_1-k_2}\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{-1}=\frac{1}{k_1-k_2}(-1)\ln\frac{k_2}{k_1}=\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}$<br>$2\rho$ | $\sqrt{2}\rho$ |
| $y'(t)$ | + | 0 | - |
| $y(t)$ | | $y_{\max}(t)=\frac{A}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1 t}-e^{-k_2 t}\right)$ | |

$$y_{\max}\left(\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}\right)=\frac{A}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}}-e^{-k_2\frac{1}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}}\right)=\frac{A}{k_2-k_1}\left(e^{\frac{-k_1}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}}-e^{\frac{-k_2}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}}\right)$$

$$=\frac{A}{k_2-k_1}\left(e^{\frac{-k_1}{k_2-k_1}\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right)}-e^{\frac{-k_2}{k_2-k_1}\ln\frac{k_2}{k_1}}\right)$$

B8. Ένα ορισμένο όχημα όταν ταξιδεύει με ταχύτητα υ km/h, καταναλώνει <u>την ώρα</u> $6 + 0{,}0001\upsilon^3$ λίτρα καύσιμα.

i) Να βρείτε τη συνολική ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 1000km με σταθερή ταχύτητα υ km/h.

ii) Να βρείτε την τιμή του υ για την οποία έχουμε την οικονομικότερη κατανάλωση καυσίμων, καθώς και την ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται το όχημα για να διανύσει τα 1000km.

Να σχολιάσετε αν η απάντηση στο ερώτημα ii) είναι εφαρμόσιμη λόγω της μεγάλης απόστασης.

Λύση:

Ο χρόνος ταξιδιού για να διανύσει την απόσταση 1000km με σταθερή ταχύτητα υ km/h είναι:

$t=\dfrac{1000}{\upsilon}$ h και αφού σε κάθε ώρα καταναλώνει $6 + 0{,}0001\upsilon^3$ λίτρα, χρειάζεται συνολικάΑρα θα καταναλώσει $\left(6+0{,}0001\upsilon^3\right)\dfrac{1000}{\upsilon}$ λίτρα

Παρατηρούμε ότι η κατανάλωση είναι συνάρτηση της ταχύτητας επομένως γράφουμε

$$\boxed{\mathrm{K}(\upsilon)=\left(6+0{,}0001\upsilon^3\right)\frac{1000}{\upsilon}=\frac{6000}{\upsilon}+0{,}1\upsilon^2}$$

$$\mathrm{K}'(\upsilon)=\left(\frac{6000}{\upsilon}+0{,}1\upsilon^2\right)'=-\frac{6000}{\upsilon^2}+0{,}1\cdot 2\upsilon=0{,}2\upsilon-\frac{6000}{\upsilon^2}$$

$$\mathrm{K}'(\upsilon)=0\Leftrightarrow 0{,}2\upsilon-\frac{6000}{\upsilon^2}=0\Leftrightarrow 0{,}2\upsilon^3-6000=0\Leftrightarrow \upsilon^3=\frac{6000}{0{,}2}\Leftrightarrow \upsilon^3=\frac{60.000}{2}\Leftrightarrow$$

$$\upsilon^3=30.000\Leftrightarrow \upsilon=\sqrt[3]{30.000}=31{,}07233\simeq 31\,\text{km/h}$$

$$\mathrm{K}'(\upsilon)>0\Leftrightarrow 0{,}2\upsilon-\frac{6000}{\upsilon^2}>0\Leftrightarrow 0{,}2\upsilon^3-6000>0\Leftrightarrow \upsilon^3>\frac{6000}{0{,}2}\Leftrightarrow \upsilon^3>\frac{60.000}{2}\Leftrightarrow$$

$$\upsilon^3>30.000\Leftrightarrow \upsilon>\sqrt[3]{30.000}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\upsilon$ | $0$ | $\sqrt[3]{30.000} \simeq 31$ | $+\infty$ |
| $K'(\upsilon)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $K(\upsilon)$ | $\searrow$ | $K\left(\sqrt[3]{30000}\right) \simeq f(31) = 300$ | $\nearrow$ |

Αρα για υ=31km/h έχουμε την μικρότερη κατανάλωση

Δεν είναι εφαρμόσιμη διότι το όχημα θα χρειάζεται περίπου $\frac{1000}{31} \simeq 32$ ώρες δηλαδή πολύ μεγάλο χρόνο.

Σημείωση: $K(\upsilon) = \frac{6000}{\upsilon} + 0{,}1\upsilon^2$.Ηθελα να δώ τι γίνεται στις ακραίες τιμές και παρατήρησα ότι όταν η ταχύτητα τείνει στο 0 η κατανάλωση τείνει στο άπειρο.Αρα μήπως ο τύπος ισχύει για κάποιο διάστημα ταχυτήτων και όχι απόλυτα?

**B9.** Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις πρέπει να έχουν άθροισμα 450 Ω. Πως πρέπει να επιλεγούν ώστε όταν συνδεθούν «εν παραλλήλω να δίνουν τη μέγιστη ολική αντίσταση;

**Λύση:**

Αν $R_1$, $R_2$ είναι οι δύο αντιστάσεις τότε έχουμε $R_1 + R_2 = 450\ \Omega$ απο την οποία παίρνουμε $R_2 = 450 - R_1$. Προφανώς είναι $R_1 > 0$ και $R_2 > 0 \Leftrightarrow 450 - R_1 > 0 \Leftrightarrow R_1 < 450$.

Γνωρίζουμε από την Φυσική ότι αν δύο αντιστάσεις συνδεθούν παράλληλα η ολική αντίστασή τους έστω R δίνεται από τον τύπο $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.Το R γράφεται $R = \frac{R_1}{R_1 + R_2} R_2$ οπότε αφού $\frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1$ είναι $R < R_2$.

<u>Απόδειξη του τύπου</u>

$$I = I_1 + I_2 \Leftrightarrow \frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{R_2}{R_1 R_2} + \frac{R_1}{R R_2} \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \Leftrightarrow R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_1}$$

$$R = \frac{R_1 \cdot (450 - R_1)}{(450 - R_1) + R_1} \Leftrightarrow R = \frac{R_1 \cdot (450 - R_1)}{450_1} \Leftrightarrow R = \frac{R_1 \cdot (450 - R_1)}{450} \Leftrightarrow R = \frac{450 R_1 - R_1^2}{450} \Leftrightarrow$$

$$R = \frac{450 R_1 - R_1^2}{450} \Leftrightarrow R = R_1 - \frac{R_1^2}{450}$$

Γράψαμε λοιπόν την ολική αντίσταση είναι συνάρτηση του $R_1$:

$$R(R_1) = R_1 - \frac{R_1^2}{450} \quad \text{οπότε} \quad R'(R_1) = 1 - \frac{2R_1}{450} = 1 - \frac{R_1}{225}$$

$$R'(R_1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{R_1}{225} = 0 \Leftrightarrow \frac{R_1}{225} = 1 \Leftrightarrow R_1 = 225$$

$$R'(R_1) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{R_1}{225} > 0 \Leftrightarrow \frac{R_1}{225} < 1 \Leftrightarrow R_1 < 225$$

| $R_1$ | 0 | | 225 | | 450 |
|---|---|---|---|---|---|
| $R'(R_1)$ | | + | 0 | − | |
| $R(R_1)$ | 0 | $\nearrow$ | $R(R_1) = 112,5$ | $\searrow$ | 0 |

$$R(R_1) = R_1 - \frac{R_1^2}{450} = 225 - \frac{225^2}{450} = 225 - \frac{225 \cdot 225}{450} = 225 - \frac{225}{2} = \frac{2 \cdot 225}{2} - \frac{225}{2} = \frac{225}{2} = 112,5$$

**B10.** Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 χιλιόμετρα βορείως ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με 40 km/h, και το φορτηγό ανατολικά με 20 km/h. Αν η ορατότητα είναι 10 km, θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

Λύση:

Αν Ι και Φ είναι ο θέσεις του Ιστιοφόρου και του Φορτηγού αντίστοιχα ύστερα από t ώρες, τότε

$\mathrm{OI} = 20 - 40t$ και $\mathrm{O\Phi} = 20t$ οπότε

$$\mathrm{I\Phi} = \sqrt{(20-40t)^2 + (20t)^2}$$

Η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $(20-40t)^2 + (20t)^2$ γίνει ελάχιστο (αφού $\sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$ ).

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση

$$f(t) = (20-40t)^2 + (20t)^2 \quad t>0$$

Εχουμε:

$$f'(t) = \left[(20-40t)^2 + (20t)^2\right]' = 2(20-40t)(20-40t)' + 2(20t)(20t)' =$$

$$2(20-40t)(-40) + 2(20t)20 = -80(20-40t) + 800t = -1600 + 3200t + 800t = 4000t - 1600$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4000t - 1600 = 0$$

| x | 0 | | $\sqrt[3]{2V}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $K\left(\sqrt[3]{30000}\right) \simeq f(31) = 300$ | ↘ | f(10) = 6<br>ελάχιστο | ↗ | $+\infty$ |

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν μια συρμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα ρ ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκο