

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

γ) να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα.

ΛΥΣΗ:

α) Ο παρονομαστής δεν μπορεί να είναι 0 επομένως πρέπει $x \neq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\beta) f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-1)}{x^2} > 0 \stackrel{\substack{e^x > 0 \text{ και } x^2 > 0 \\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*}}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Σχηματίζουμε πινακάκι όπου φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου.

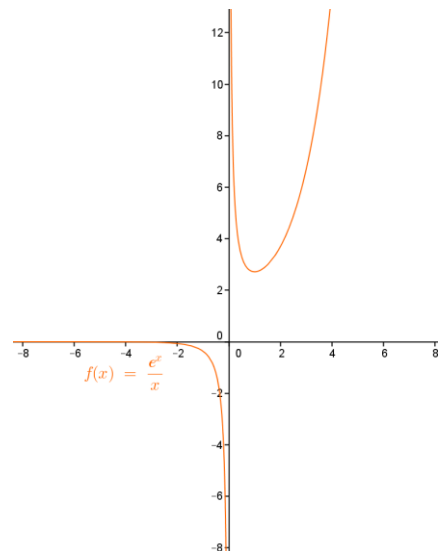
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$	-		0	+
$f(x) = \frac{e^x}{x}$	\swarrow	\swarrow	Τοπικό ελάχιστο $f(1) = \frac{e^1}{1} = e$	\searrow

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$
- Γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$
- Γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

γ) Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το οποίο είναι ίσο με:

$$f(1) = \frac{e^1}{1} = e$$



4. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 που δίνεται:

α) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ στο $x_0 = \pi$

ΛΥΣΗ:

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(\pi)$.

$$f'(x) = (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$$

$$\text{Άρα: } \lambda = f'(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi + \eta\mu\pi = -1 + 0 = -1$$

Η εφαπτομένη θα διέρχεται φυσικά από το σημείο επαφής $(\pi, f(\pi))$ οπότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης

$$\text{Είναι } f(\pi) = \eta\mu\pi - \sigma\upsilon\nu\pi = 0 - (-1) = 1$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $(\pi, 1)$ οπότε:

$$1 = -1\pi + \beta \Leftrightarrow -1\pi + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \pi + 1$$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι λοιπόν η:

$$y = -x + \pi + 1$$

