Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. **Μονάδες 4**

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 3} f(x)$. **Μονάδες 4**

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f. **Μονάδες 7**

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία y = 2x + 5. **Μονάδες 10**

Λύση:

α. Πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$. Αρα το πεδίο ορισμού είναι $A=\mathbb{R}-\{-1\}$.

β. $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x+1}=\frac{2\cdot 3}{3+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

γ. $f'(x)=\left(\frac{2x}{x+1}\right)'=\frac{(2x)'(x+1)-2x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2(x+1)-2x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x+2-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

δ. Γνωρίζουμε ότι οι παράλληλες ευθείες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης λ, οπότε επειδή η y = 2x + 5 έχει λ=2 και οι ζητούμενες εφαπτόμενες θα έχουν λ=2. Ομως επιπλέον γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι ίσος με την παράγωγο στο σημείο επαφής, οπότε αν αυτό είναι το $(x_0, f(x_0))$ έχουμε:

$$f'(x_0)=\lambda \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2}=1 \Leftrightarrow (x_0+1)^2=1 \Leftrightarrow x_0+1=1 \text{ ή } x_0+1=-1 \Leftrightarrow x_0=0 \text{ ή } x_0=-2$$

και

$$f(0)=\frac{2\cdot 0}{0+1}=0$$

$$f(-2)=\frac{2\cdot(-2)}{-2+1}==\frac{-4}{-1}=4$$

Αρα τα σημείο επαφής είναι τα $(0,\ 0)$ και $(-2,\ 4)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής: $y=2x+\beta$ οπότε απομένει να προσδιορίσω το β.

Οι συντεταγμένες του σημείου επαφής θα επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, οπότε αντικαθιστώντας για καθένα από τα δύο σημεία επαφής έχουμε:

- Σημείο επαφής το $(0,\ 0)$

$0=2\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=0$

Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι η: $y=2x$.

- Σημείο επαφής το $(-2,\ 4)$

$4 = 2\cdot(-2)+\beta \Leftrightarrow \beta = 4+4 = 8$

Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι η: $y = 2x+8$.