2002 ΘΕΜΑ 4ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(x - P(A\cup B)\right)^3 - \left(x - P(A\cap B)\right)^3 \text{ , } x \in R.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$. **Μονάδες 5**

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

Μονάδες 7

Λύση:

α. Από τον προσθετικό νόμο γνωρίζουμε ότι:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B) + P(A\cap B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$P(A) + P(B) = P(A\cup B) + P(A\cap B).$$

Αρα η δοθείσα σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B) + P(A\cap B) \neq 2P(A\cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B) \neq 2P(A\cap B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B) \neq P(A\cap B)$$

Πιο κομψή και σύντομη λύση:

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) \neq P(A\cap B) + P(A\cap B) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{P(A) + P(B) - P(A\cap B)}_{P(A\cup B)} \neq P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B) \neq P(A\cap B)$$

β. Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = 3\left(x - P(A\cup B)\right)^2\left(x - P(A\cup B)\right)' - 3\left(x - P(A\cap B)\right)^2\left(x - P(A\cap B)\right)' =$$

$$3\left(x - P(A\cup B)\right)^2 - 3\left(x - P(A\cap B)\right)^2 = 3\left[\left(x - P(A\cup B)\right)^2 - \left(x - P(A\cap B)\right)^2\right] =$$

$$3\left[\left(x - P(A\cup B)\right) - \left(x - P(A\cap B)\right)\right]\left[\left(x - P(A\cup B)\right) + \left(x - P(A\cap B)\right)\right] =$$

$$3\left(x - P(A\cup B) - x + P(A\cap B)\right)\left(x - P(A\cup B) + x - P(A\cap B)\right) =$$

$$3\left(-P(A\cup B) + P(A\cap B)\right)\left(2x - P(A\cup B) - P(A\cap B)\right)$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3\left(-P(A\cup B)+P(A\cap B)\right)\left(2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)\right)=0$ και επειδή όπως δείξαμε

$P(A\cup B)\neq P(A\cap B) \Leftrightarrow 2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ (αφού από τον προσθετικό νόμο $P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$)

Επειδή $A\cap B\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\leq P(A\cup B) \Leftrightarrow -P(A\cup B)+P(A\cap B)\leq 0$ και επειδή

$P(A\cup B)\neq P(A\cap B)$ καταλήγουμε: $-P(A\cup B)+P(A\cap B)<0$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3\left(-P(A\cup B)+P(A\cap B)\right)\left(2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)\right)>0 \Leftrightarrow$

$2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)<0 \Leftrightarrow 2x<P(A\cup B)+P(A\cap B) \Leftrightarrow x<\dfrac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}$

$\Leftrightarrow x<\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

x	$-\infty$	$\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$	∞
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(\dfrac{P(A)+P(B)}{2}\right)$	$\searrow$

Αρα η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x=\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$, το $f\left(\dfrac{P(A)+P(B)}{2}\right)$

γ) Τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα όταν $A\cap B=\varnothing$ οπότε $P(A\cap B)=0$.Για δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

- $f(P(A))=\left(P(A)-P(A\cup B)\right)^3-\left(P(A)-P(A\cap B)\right)^3=\left(P(A)-P(A)-P(B)\right)^3-\left(P(A)-0\right)^3=$

$\left(-P(B)\right)^3-\left(P(A)\right)^3=-\left(P(B)\right)^3-\left(P(A)\right)^3=-\left(P(A)\right)^3-\left(P(B)\right)^3$ (1)

- $f(P(B))=\left(P(B)-P(A\cup B)\right)^3-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)^3=\left(P(B)-P(A)-P(B)\right)^3-\left(P(B)-0\right)^3=$

$-\left(P(A)\right)^3-\left(P(B)\right)^3$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$f(P(A))=f(P(B))$.