2003 ΘΕΜΑ 2ο ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x=3, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **Μονάδες 10**

γ. Αν $h(x)=\frac{f(x)-\sqrt{3}}{x-2}$, για $x\neq 2$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$. **Μονάδες 10**

Λύση:

α. Πρέπει $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$ *(το x^2-1 το θεωρώ τριώνυμο με α=1>0 και ζητάω πότε γίνεται ομόσημο του α ή 0.Αυτό όπως γνωρίζω από Α Λυκείου συμβαίνει για τα x εκτός των ριζών ή για τις ρίζες.)*

Αρα $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x=3 είναι το $f'(3)$.

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^2-1\right)'}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Αρα $f'(3)=\frac{3}{\sqrt{3^2-1}}=\frac{3}{\sqrt{9-1}}=\frac{3}{\sqrt{8}}=\frac{3}{\sqrt{4\cdot 2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

γ. $h(x)=\frac{f(x)-\sqrt{3}}{x-2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x-2}$

Αν για να βρώ το $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ αντικαταστήσω όπου x=2 βρίσκω $\frac{0}{0}$, έτσι θα προσπαθήσω να απλοποιήσω το x-2

Για x≠2 ο τύπος της h(x) γράφετα:

$$h(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x-2}=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{x^2-1-3}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$\frac{x^2-1-3}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}$$

Ετσι πλέον:

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}=\frac{2+2}{\sqrt{2^2-1}+\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$