2003 ΘΕΜΑ 3ο ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. R **β.** (-1,1) **γ.** R- {-1,1} **δ.** (1, + ∞) **Μονάδες 5**

Β. Να αποδείξετε ότι f΄(x)<0 για κάθε x του πεδίου ορισμού της. **Μονάδες 7**

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]$ **Μονάδες 6**

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) με τον άξονα x΄x . **Μονάδες 7**

Λύση:

Α. γ.

Β. $f'(x)=\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)'=\dfrac{(x)'(x^2-1)-x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ είναι $x^2\geq 0\Rightarrow x^2+1\geq 1>0\Rightarrow x^2+1>0\Rightarrow -(x^2+1)<0$

κι επειδή και ο παρανομαστής για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ είναι θετικός το πηλίκο θα είναι αρνητικός

δηλαδή $f'(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Γ. $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot\dfrac{x}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{(x-1)}=\dfrac{-1}{-1-1}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

Δ. Γνωρίζουμε ότι αν ω είναι η ζητούμενη γωνία και λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) τότε ισχύει:

εφω=λ= f΄(0)

Ομως $f'(0)=\dfrac{-(1+0^2)}{(0^2-1)^2}=\dfrac{-1}{1}=-1$

Αρα εφω = −1.Γνωρίζουμε ότι εφ45°=1 και ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν αντίθετες εφαπτομένες οπότε η ζητούμενη γωνία είναι η ω=180°- 45°=135°.