2003 ΘΕΜΑ 4ο

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α.Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες. **Μονάδες 5**

γ. Αν σε κάθε παρατήρηση της ομάδας Α γίνει αύξηση 20% και οι παρατηρήσεις της ομάδας Β αυξηθούν κατά 5 ευρώ η κάθε μία, πώς διαμορφώνονται οι νέες μέσες τιμές των δύο ομάδων;

Μονάδες 8

δ. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες με τα νέα δεδομένα.

Μονάδες 6

Λύση:

α. Αν συμβολίσω με t_i i=1,2, 3,4, 5, 6 τις παρατηρήσεις της ομάδας Α και με τ_i i=1,2, 3,4, 5, 6 τις παρατηρήσεις της ομάδας Β τότε:

$$\overline{x}_{\text{A}} = \frac{\sum_{i=1}^{6} t_i}{\nu} = \frac{1+8+9+5+3+4}{6} = \frac{1+9+8+5+3+4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Διατάσσω τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά:

1, 3, 4, 5, 8, 9

Αφού έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων θα είναι

$$\delta_{\text{A}} = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

$$\overline{x}_{\text{B}} = \frac{\sum_{i=1}^{6} \tau_i}{\nu} = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{7+14+6+4+12+5}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

Διατάσσω τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά:

4, 5, 6, 7, 12, 14

Αφού έχουμε άρτιο πλήθος παρατηρήσεων θα είναι

$$\delta_{\text{B}} = \frac{6+7}{2} = 6,5$$

β. Θα χρειαστεί να υπολογίσω τον συντελεστή μεταβολής $CV = \frac{s}{\overline{x}}$ κάθε ομάδας και γι΄ αυτό πρέπει να υπολογίσω την τυπική απόκλιση κάθε ομάδας:

$$s_{\text{A}}^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i - \overline{x}_{\text{A}}\right)^2 = \frac{(1-5)^2+(8-5)^2+(9-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2}{6} =$$

$$\frac{(-4)^2+3^2+4^2+0^2+(-2)^2+(-1)^2}{6} = \frac{16+9+16+0+4+1}{6} = \frac{46}{6} = \frac{23}{3}$$

Άρα $s_{\text{A}} = \sqrt{s_{\text{A}}^2} = \sqrt{\frac{23}{3}}$ και

$$CV_{\text{A}} = \frac{s_{\text{A}}}{\overline{x}_{\text{A}}} = \frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5} = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}}$$

$$s_{\text{B}}^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(\tau_i - \overline{x}_{\text{B}}\right)^2 = \frac{(7-8)^2+(14-8)^2+(6-8)^2+(4-8)^2+(12-8)^2+(5-8)^2}{6} =$$

$$\frac{(-1)^2+6^2+2^2+(-4)^2+4^2+(-3)^2}{6} = \frac{1+36+4+16+16+9}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3}$$

Αρα $s_{\text{B}} = \sqrt{s_{\text{B}}^2} = \sqrt{\frac{41}{3}}$ και

$$CV_{\text{B}} = \frac{s_{\text{B}}}{\overline{x}_{\text{B}}} = \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} = \frac{\sqrt{41}}{8\sqrt{3}}$$

Υποθέτω $CV_{\text{A}} < CV_{\text{B}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{41}}{8\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{23}}{5} < \frac{\sqrt{41}}{8} \Leftrightarrow \frac{23}{25} < \frac{41}{64} \Leftrightarrow 23\cdot 64 < 25\cdot 41 \Leftrightarrow 1472 < 1025$ που δεν ισχύει, άρα δεν ισχύει και η ισοδύναμη αρχική οπότε συμπεραίνω πως $CV_{\text{B}} < CV_{\text{A}}$ δηλαδή οι παρατηρήσεις της ομάδας Β είναι πιο ομοιογενείς από αυτές τις ομάδας Α.

γ. Οι νέες παρατηρήσεις της ομάδας Α γίνονται $t_i + 20\%t_i = t_i + 0{,}2t_i = 1{,}2t_i$, i=1,2, 3,4, 5, 6 οπότε σύμφωνα με εφαρμογή 3 σ.99 του σχολικού $\overline{x}'_{\text{A}} = 1{,}2\overline{x}_{\text{A}}$ και $s'_{\text{A}} = |1{,}2|s_{\text{A}} \Leftrightarrow s'_{\text{A}} = 1{,}2s_{\text{A}}$

Οι νέες παρατηρήσεις της ομάδας Β γίνονται $\tau_i + 5$ i=1,2, 3,4, 5, 6 οπότε σύμφωνα με εφαρμογή3 σ.99 του σχολικού $\overline{x}'_{\text{B}} = \overline{x}_{\text{B}} + 5$.

δ. Σύμφωνα με εφαρμογή 3 σ.99 του σχολικού $s'_{\text{A}} = |1{,}2|s_{\text{A}} \Leftrightarrow s'_{\text{A}} = 1{,}2s_{\text{A}}$ και $s'_{\text{B}} = s_{\text{B}}$.Επομένως

$$CV'_{\text{A}} = \frac{s'_{\text{A}}}{\overline{x}'_{\text{A}}} = \frac{1{,}2s_{\text{A}}}{1{,}2\overline{x}_{\text{A}}} = \frac{s_{\text{A}}}{\overline{x}_{\text{A}}} = CV_{\text{A}}$$

$$CV'_{\text{B}} = \frac{s'_{\text{B}}}{\overline{x}'_{\text{B}}} = \frac{s'_{\text{B}}}{\overline{x}_{\text{B}}} = \frac{s_{\text{B}}}{\overline{x}_{\text{B}}+5} < \frac{s_{\text{B}}}{\overline{x}_{\text{B}}} = CV_{\text{B}}$$

$$CV'_{\text{B}} < CV_{\text{B}} < CV_{\text{A}} = CV'_{\text{A}}$$

Αρα πάλι οι παρατηρήσεις της ομάδας Β είναι πιο ομοιογενείς από αυτές τις ομάδας Α.