2004 ΘΕΜΑ 2^{ο} ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x+2}{e^x}$$

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. **Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)+f'(x)=\frac{1}{e^x}$$ **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0, f(0)).

Μονάδες 8

Λύση:

α. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{e^x}\right)'=\frac{(x+2)'e^x-(x+2)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{1\cdot e^x-(x+2)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x-2)}{(e^x)^2}=\frac{-1-x}{e^x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-1-x}{e^x}=0\Leftrightarrow -1-x=0\Leftrightarrow x=-1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{-1-x}{e^x}>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}-1-x>0\Leftrightarrow -1>x\Leftrightarrow x<-1$$

x	$-\infty$	$\mathbf{-1}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\mathbf{e}$	$\searrow$

Αρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$

και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$.

Παρουσιάζει μέγιστο στο -1, το $f(-1)=\frac{-1+2}{e^{-1}}=\frac{1}{e^{-1}}=1\cdot e^1=e$

β. $f(x)+f'(x)=\frac{x+2}{e^x}+\frac{-1-x}{e^x}=\frac{x+2-1-x}{e^x}=\frac{1}{e^x}$

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής $y=\lambda \mathrm{x}+\beta$ όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.Γνωρίζουμε όμως ότι $\lambda=\mathrm{f}'(0)$.

$$\mathrm{f}'(0)=\frac{-1-0}{e^{0}}=\frac{-1}{1}=-1$$

Αρα $y=-1\cdot \mathrm{x}+\beta$

Απομένει να βρούμε το β.

$$\mathrm{f}(0)=\frac{0+2}{\mathrm{e}^{0}}=\frac{2}{1}=2$$

Αρα το σημείο επαφής έχει συντεταγμένες (0,2).Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο επαφής θα επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας:

$$2=-1\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=2$$

Αρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $y=-\mathrm{x}+2$.