2004 Επαναληπτικές ΘΕΜΑ 4ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Έστω Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση

f : IR → IR με τύπο $f(x)=\frac{1}{3}x^3\text{-}kx^2+4x+2$, όπου $k\in\Omega$.

Αν P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6), τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6). **Μονάδες 8**

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β, όπου

Α: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»

Β: «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

Μονάδες 8

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ, όπου

Γ: «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο IR » .

Μονάδες 9

Λύση:

α. $2P(2)=4P(4)=2P(6)\Leftrightarrow P(2)=2P(4)=P(6)$

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1\Rightarrow 4P(4)+2P(4)+4P(4)+P(4)+4P(4)+2P(4)=1$$

$$\Rightarrow 17P(4)=1\Leftrightarrow P(4)=\frac{1}{17}.$$

Άρα $P(1)=P(3)=P(5)=\frac{4}{17}$ και $P(2)=P(6)=\frac{2}{17}$

β. $A=\{2,4,6\}$

$$P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{2}{17}+\frac{1}{17}+\frac{2}{17}=\frac{5}{17}$$

$B=\{1,\ 3,\ 5\}$

$$P(B)=P(A')=1-P(A)=1-\frac{5}{17}=\frac{17}{17}-\frac{5}{17}=\frac{12}{17}$$

Εναλλακτικά:

$$P(B)=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{4}{17}+\frac{4}{17}+\frac{4}{17}=\frac{12}{17}$$

γ. $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-kx^2+4x+2\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2\text{-}k2x+4=x^2-2kx+4$

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πρέπει $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ *(τα x για τα οποία $f'(x)=0$ πρέπει να είναι μεμονωμένα, δηλαδή να μην σχηματίζουν διάστημα)* δηλαδή το τριώνυμο $x^2-2kx+4\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό, αφού α=1>0 συμβαίνει όταν $\Delta\leq 0$.

α=1, β=-2k   γ=4

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2k)^2-4\cdot 1\cdot 4=4k^2-16$

$\Delta\leq 0\Leftrightarrow 4k^2-16\leq 0\Leftrightarrow k^2-4\leq 0\Leftrightarrow k^2\leq 4\Leftrightarrow k^2\leq 2^2\overset{k>0}{\Leftrightarrow} k\leq 2\Leftrightarrow k=1$ ή k=2

Αρα $P(\Gamma)=P(1)+P(2)=\frac{4}{17}+\frac{2}{17}=\frac{6}{17}$.