

2004 ΘΕΜΑ Δ Ανάλυση-Πιθανότητες

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$

Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x , στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

A. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 9

B. Για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$, $P(B)$ καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A \cap B)$

ii. $P(A - B)$

iii. $P[(A \cap B)']$

iv. $P[(A - B) \cup (B - A)]$

Μονάδες 16

Λύση:

A. $f'(x) = \left(2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10\right)' = 2 \cdot 3x^2 - \frac{5}{2} \cdot 2x + 1 + 0 = 6x^2 - 5x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0$$



$$\alpha=6, \quad \beta=-5 \quad \gamma=1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad x > \frac{1}{2}$$

Συντάσσουμε πίνακα με το πρόσημο της παραγώγου και την μονοτονία της f.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	∞
$f'(x)$	+	0	-	+
f(x)				

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$
- Γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$
- Γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = \frac{1}{3}$ άρα $P(B) = \frac{1}{3}$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$ άρα $P(A) = \frac{1}{2}$

B. i. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$$

ii. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

iii. $P\left[(A \cap B)'\right] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

iv. $P\left[(A - B) \cup (B - A)\right] = P(A - B) + P(B - A) \stackrel{ii.}{=} \frac{1}{3} + P(B) - P(B \cap A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} =$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$