2004 ΘΕΜΑ $2^{\text{ο}}$ ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 10**

Β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **Μονάδες 15**

Λύση:

Α.Πρέπει οι υπόριζες ποσότητες να είναι μή αρνητικές, και ο παρονομαστής διάφορος του μηδενός:

$$\left.\begin{matrix} x\ge 0 \\ \sqrt{x}-\sqrt{3}\ne 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\ne\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\ge 0 \\ \left(\sqrt{x}\right)^2\ne\left(\sqrt{3}\right)^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x\ge 0 \\ x\ne 3 \end{matrix}\right\}$$

Αρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=[0,3)\cup(3,+\infty)$.

Β. Αν αντικαταστήσω στον τύπο της f(x) όπου x=3 για να βρώ το όριο, βρίσκω $\frac{0}{0}$ οπότε πρέπει να επιτύχω κάποια απλοποίση:

Για $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{x-3}$$

Παρατηρώ ότι το 3 είναι ρίζα του x^2-4x+3 αφού:

$3^2-4\cdot 3+3=9-12+3=12-12=0$ και από σχήμα Horner έχουμε:

1	-4	3	**ρ=3**
	3	-3	
1	-1	0	

Αρα $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

Επομένως: $f(x)=\dfrac{\cancel{(x-3)}(x-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\cancel{x-3}}=(x-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)=(3-1)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.