2005 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑ 2ο ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in R$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **Μονάδες 3**

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

γ. Να βρείτε τα α και β, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Α(1,1) της γραφικής παράστασης της f να είναιy=3x-2 . **Μονάδες 10**

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\left(f'(x)\cdot x^3\right)$ **Μονάδες 7**

Λύση:

α. Πρέπει x>0.Αρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=\left(0,+\infty\right)$

β. $f'(x)=\left(\alpha\ln x-\beta x^2\right)'=\alpha\left(\ln x\right)'-\beta\left(x^2\right)'=\alpha\dfrac{1}{x}-\beta 2x=\dfrac{\alpha}{x}-2\beta x$

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής $y=\lambda x+\mu$ όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.Γνωρίζουμε όμως ότι $\lambda=f'(1)=\dfrac{\alpha}{1}-2\beta\cdot 1=\alpha-2\beta$.

Εμείς θέλουμε $\lambda=3 \Leftrightarrow \alpha-2\beta=3$ (1)

Επιπλέον αφού το σημείο Α(1,1) είναι σημείο της γραφικής παράστασης, θα επαληθεύει τον τύπο της f.

$f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha\ln 1-\beta\cdot 1=1 \Leftrightarrow \alpha\cdot 0-\beta=1 \Leftrightarrow 0-\beta=1 \Leftrightarrow -\beta=1 \Leftrightarrow \beta=-1$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$\alpha-2(-1)=3 \Leftrightarrow \alpha+2=3 \Leftrightarrow \alpha=3-2 \Leftrightarrow \alpha=1.$

δ. Επειδή όπως βρήκαμε στο γ. $\alpha=1$ και $\beta=-1$ έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{x}-2(-1)x=\frac{1}{x}+2x$$

$$\lim_{x\to 2}\left(f'(x)\cdot x^3\right)=\lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{1}{x}+2x\right)\cdot x^3\right]=\left(\frac{1}{2}+2\cdot 2\right)\cdot 2^3=\left(\frac{1}{2}+4\right)\cdot 8=4+32=36.$$