2005 Επανάληψης ΘΕΜΑ 3ο

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\overline{x} \pm 3s$, $\overline{x} \pm 2s$, $\overline{x} \pm s$, $\overline{x}$.

α. Να δείξετε ότι $\overline{x} = 20$ και s=2. **Μονάδες 10**

β. Να βρείτε το α∈N*, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\overline{x} - \alpha \cdot s, \overline{x} + \alpha \cdot s)$ (ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων. **Μονάδες 5**

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\overline{x} + 4)x + 9s$ **Μονάδες 10**

Λύση:

α. Το 20 είναι η διάμεσος και επειδή σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή η μέση τιμή είναι ίση με την διάμεσο, συμπεραίνουμε ότι $\overline{x} = 20$.

Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι στην κανονική κατονομή στο διάστημα $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$ βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων και στο $(\overline{x} - 2s, \overline{x} - s)$ το 13,5%

Αρα συνολικά στο $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + s)$ βρίσκεται το 68%+13,5%=81,5% των παρατηρήσεων.

Αρα το διάστημα (16, 22)=(20-4, 20+2) =(20-2·2, 20+2) θα είναι το διάστημα $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + s)$.Επομένως s=2.

β. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι το 95% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 2s)$, επομένως α=2΄

γ. Γνωρίζουμε *(σ.95 σχολικού)* ότι αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή:

R=6s=6·2=12 οπότε αντικαθιστώντας τα γνωστά στον τύπο της f:

$$f(x) = \frac{R}{2}x^2 - (\overline{x} + 4)x + 9s = \frac{12}{2}x^2 - (20 + 4)x + 9 \cdot 2 = 6x^2 - 24x + 18$$

$$f'(x) = (6x^2 - 24x + 18)' = 6 \cdot 2x - 24 = 12x - 24$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x-24=0 \Leftrightarrow x=\frac{24}{12}=2$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 12x-24>0 \Leftrightarrow x>\frac{24}{12} \Leftrightarrow x>2$

x	$-\infty$		**2**		$+\infty$
$f'(x)$		-	**0**	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	f(2) = -6 ελάχιστο	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2)=6\cdot 2^2-24\cdot 2+18=6\cdot 4-24\cdot 2+18=24-48+18=42-48=-6$

Αρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι το -6, και παίρνει την ελάχιστη αυτή τιμή για x=2