2005 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑ Δ – Στατιστική - Πιθανότητες

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του Ω είναι

$$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\ \mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{1,\ 3,\ 4\},\ \mathrm{A}-\mathrm{B}=\{2,\ 6\},\ \Gamma=\left\{x\in\Omega\,/\,\frac{x+1}{x-1}\geq 2\right\}.$$

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ). **Μονάδες 9**

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Γ. **Μονάδες 3**

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ. **Μονάδες 3**

δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ, 3λ, 5λ, όπου $\lambda\in\Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta=\{\lambda\in\Omega/\ s^2>24\}$. **Μονάδες 10**

Λύση:

α. • Είναι $\mathrm{A}=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\{1,\ 3,\ 4\}\cup\{2,\ 6\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

$$P(\mathrm{A})=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

• $\mathrm{B}=(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})-(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}-\{2,\ 6\}=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$$P(\mathrm{B})=\frac{N(\mathrm{B})}{N(\Omega)}=\frac{4}{10}$$

Β τρόπος

Αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα

$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{6}{10}$$

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{10}$$

$$P(A-B)=\frac{N(A-B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{10}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=$$

$$\frac{6}{10}-\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}$$

Η ανίσωση ορίζεται για x≠1 και με αυτόν τον περιορισμό επειδή $x \in \Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ θα είναι $x-1>0$ οπότε:

$\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 2(x-1) \Leftrightarrow x+1 \geq 2x-2 \Leftrightarrow 1+2 \geq 2x-x \Leftrightarrow 3 \geq x \Leftrightarrow x \leq 3$ κι επειδή $x \in \Omega$ με x≠1

είναι x=2, x=3

Σημείωση: Οπως έχουμε μάθει στην Β Λυκείου ανισώσεις αυτού του τύπου λύνονται γενικά ως εξής:

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-\frac{2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-2x+2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(x-1)(-x+3) \geq 0 \\ x-1 \neq 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow 1<x \leq 3.$$

Ομως εδώ γνωρίζοντας ότι $x \in \Omega$ η επίλυση διευκολύνεται σημαντικά

- Αρα Γ={2,3} οπότε

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{2}{10}$$

β. Αφού $\mathrm{B}=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ και $\Gamma=\{2,\ 3\}$ θα είναι $\mathrm{B}-\Gamma=\{1,\ 4,\ 5\}$

Αρα $\mathrm{P}(\mathrm{B}-\Gamma)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}-\Gamma)}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{3}{10}$

β' τρόπος:

$$P(\mathrm{B}-\Gamma)=P(\mathrm{B})-P(\mathrm{B}\cap\Gamma)=\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$

γ. Αφού $\mathrm{B}=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ και $\Gamma=\{2,\ 3\}$ θα είναι $\Gamma-\mathrm{B}=\{2\}$

Αφού $\mathrm{B}-\Gamma=\{1,\ 4,\ 5\}$ και $\Gamma-\mathrm{B}=\{2\}$ θα είναι $(\mathrm{B}-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{B})=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$

Αρα $\mathrm{P}[(\mathrm{B}-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{B})]=\frac{\mathrm{N}[(\mathrm{B}-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{B})]}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

Αρα $\mathrm{P}(\Gamma-\mathrm{B})=\frac{\mathrm{P}(\Gamma-\mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{10}$

β' τρόπος: $\mathrm{P}(\Gamma-\mathrm{B})=\frac{\mathrm{N}(\Gamma-\mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{10}$

$$\mathrm{P}((\mathrm{B}-\Gamma)\cup(\Gamma-\mathrm{B}))=\mathrm{P}(\mathrm{B}-\Gamma)+\mathrm{P}(\Gamma-\mathrm{B})=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}$$

δ) $\overline{x}=\dfrac{\lambda+3\lambda+5\lambda}{3}=\dfrac{9\lambda}{3}=3\lambda$

$$s^2=\frac{(\lambda-3\lambda)^2+(3\lambda-3\lambda)^2+(5\lambda-3\lambda)^2}{3}=\frac{(-2\lambda)^2+0^2+(2\lambda)^2}{3}=\frac{4\lambda^2+4\lambda^2}{3}=\frac{8\lambda^2}{3}$$

$$s^2>24\Leftrightarrow\frac{8\lambda^2}{3}>24\Leftrightarrow\frac{\lambda^2}{3}>3\Leftrightarrow\lambda^2>9\overset{\lambda\in\Omega\text{ οπότε }\lambda>0}{\Leftrightarrow}\lambda>3$$

Αρα $\Delta=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$$P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{7}{10}$$