2005 ΘΕΜΑ 3ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι $\frac{7}{8}$.

(ii) Οι πιθανότητες P(B) , P(A∩B) δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $\mathrm{X}=\left\{\mathrm{k},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right\}$, όπου

$$k=\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{x^2-6x+5}.$$

α. Να βρεθεί το k. **Μονάδες 5**

β. Να βρεθούν τα P(B), P(A∩B) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 8**

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. **Μονάδες 6**

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α. **Μονάδες 6**

Λύση:

α) $k=\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-1)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{x-1}=\frac{3}{4}$

β) Αρα $\mathrm{X}=\left\{\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right\}$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $\mathrm{P}(\mathrm{A})\le 1$ *(σχολικό σ. 149)*

Επομένως αφού $\frac{5}{4}>1$ καμμιά από τις πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ δεν δύναται να είναι ίση με $\frac{5}{4}$.

Επειδή $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\subseteq\mathrm{B}$ θα είναι και $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\mathrm{P}(\mathrm{B})$ και επειδή από τα δεδομένα οι πιθανότητες P(B) , P(A∩B) δεν είναι ίσες είναι $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})<\mathrm{P}(\mathrm{B})$.Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{2}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{3}{4}$

γ) **(1)** Δίνεται ότι : $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)$$

Αρα $P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=\frac{7}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{7}{8}+\frac{4}{8}-\frac{6}{8}=\frac{5}{8}$.

(2) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{5}{8}-\frac{4}{8}=\frac{1}{8}$