Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Λ(1,1). **Μονάδες 7**

β. Από τυχαίο σημείο Μ(x, y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx΄ και yy΄, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Οx, Οy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη. **Μονάδες 10**

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\overline{x}$ = 5 και τυπική απόκλιση s_x = 2. Να βρεθεί η μέση τιμή $\overline{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών. **Μονάδες 8**

Λύση:

α. $f'(x)=-\frac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.Γνωρίζουμε όμως ότι $\lambda=f'(1)$.

$$f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-\frac{1}{1}=-1$$

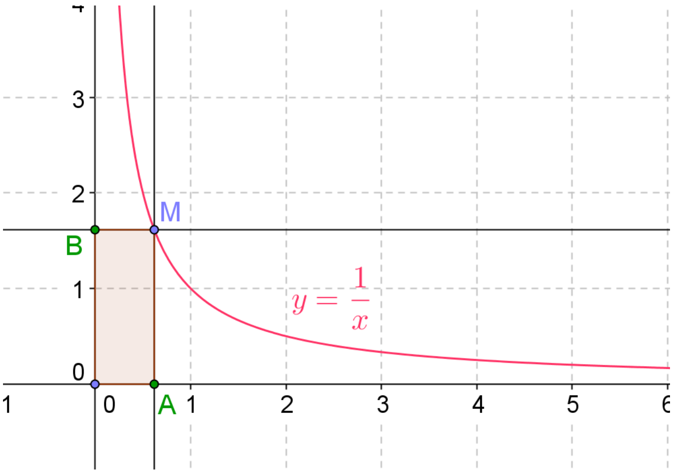
Αρα $y=-1\cdot x+\beta$

Απομένει να βρούμε το β.

Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο επαφής Λ(1,1) θα επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας:

$$1=-1\cdot1+\beta \Leftrightarrow 1=-1+\beta \Leftrightarrow 1+1=\beta \Leftrightarrow 2=\beta \Leftrightarrow \beta=2$$

Αρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $\boxed{y=-x+2}$.



β) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΜΑΟΒ είναι

$$\Pi=MA+OA+OB+BM=y+x+y+x=2x+2y$$

Αντικαθιστώ όπου $y=\frac{1}{x}$ για να εκφράσω την περίμετρο ως συνάρτηση του x.

$$\Pi(x)=2x+2\frac{1}{x}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της $\Pi(x)$

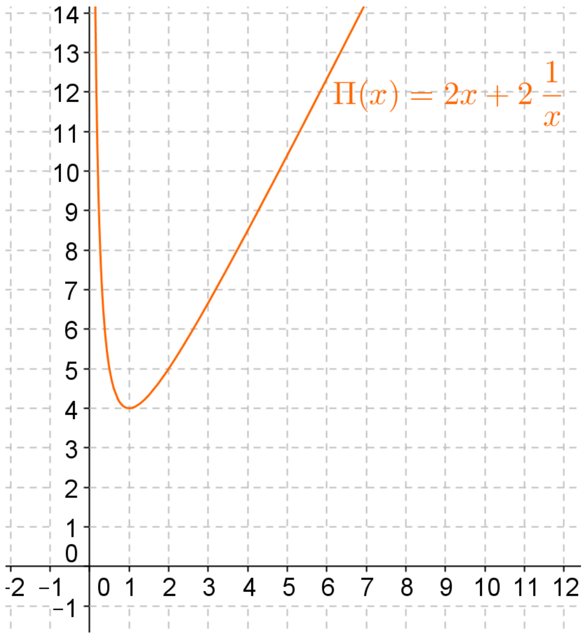
$$\Pi'(x)=\left(2x+2\frac{1}{x}\right)'=2-2\frac{1}{x^2}=2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Pi'(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2=1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1$$

$$\Pi'(x)>0 \Leftrightarrow 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)>0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1>\frac{1}{x^2} \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x^2>1^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>1$$

x	0		1		$+\infty$
$\Pi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\Pi(x)$	$+\infty$	↘	$\Pi(1)=4$	↗	$+\infty$

$$\Pi(1)=2\cdot 1+2\cdot\frac{1}{1}=2+2=4$$



γ. Γνωρίζουμε (*εφαρμογή σ. 99 του σχολικού)* ότι όταν:

$y_i=cx_i+d \qquad$ i=1, 2, 3, 4, 5

τότε ισχύει:

$$\boxed{\bar{y}=\bar{x}+d \text{ και } s_y=|c|s_y}$$

οπότε εδώ που είναι $y_i=-x_i+2 \qquad$ i=1, 2, 3, 4, 5

$\bar{y}=-\bar{x}+2=-5+2=-3$

και

$s_y=|-1|s_x=s_x=2.$