Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10$, x≥0.

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο Α(1,f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι k=2 και να βρείτε την εξίσωσή της. **Μονάδες 5**

β. Μία τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\overline{x}$ =f(1) και τυπική απόκλιση $s = -\frac{2f'(4)}{13}$. Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,16). **Μονάδες 10**

(ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.

Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου α>0, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

Λύση:

α. Αφού είναι παράλληλη προς τον άξονα των x΄x έχει λ=0.

Γνωρίζουμε όμως ότι $\lambda = f'(1)$.Επομένως $f'(1) = 0$.

Βρίσκουμε την παράγωγο της

$$f'(x) = \left(-2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10\right)' = -4x + k + 4\frac{1}{2\sqrt{x}} = -4x + k + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4\cdot 1 + k + \frac{2}{\sqrt{1}} = 0 \Leftrightarrow -4 + k + \frac{2}{1} = 0 \Leftrightarrow -4 + k + 2 = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow -2 + k = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Αρα $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$

$$f(1) = -2\cdot 1^2 + k\cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 = -2 + k + 4 + 10 = k + 12 = 2 + 12 = 14$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι y=14

$\overline{x} = f(1) = 14$

Για k=2 $f'(x) = -4x + 2 + \frac{2}{\sqrt{x}}$ επομένως

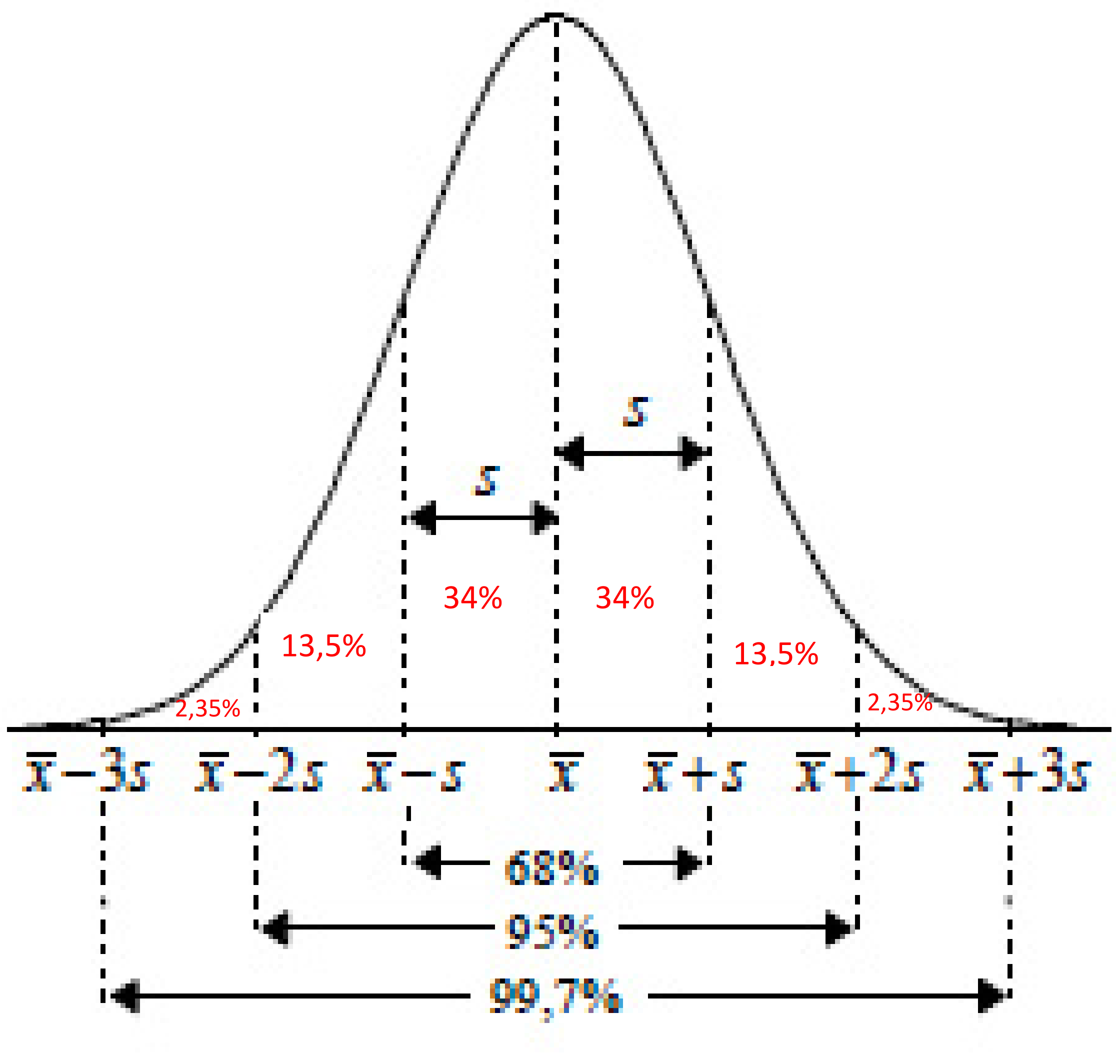
$$f'(4) = -4\cdot 4 + 2 + \frac{2}{\sqrt{4}} = -16 + 2 + \frac{2}{2} = -14 + 1 = -13$$

$$s = -\frac{2f'(4)}{13} = -\frac{2(-13)}{13} = \frac{2\cdot 13}{13} = 2$$

Είναι $8 = 14 - 3 \cdot 2 = \overline{x} - 3 \cdot s$ και από την θεωρία γνωρίζουμε ότι σε μια κανονική κατανομή, μικρότερες από το $\overline{x} - 3 \cdot s$ ειναι το $\frac{100\% - 99,7\%}{2} = \frac{0,3\%}{2} = 0,15\% = 0,0015$ των παρατηρήσεων που εδώ μας δίνεται ότι είναι το 3.Αρα όλες οι παρατηρήσεις είναι ν=$\frac{3}{0,0015} = \frac{30.000}{15} = 2.000$

Το διάστημα $(10,16) = (14 - 2 \cdot 2,\ 14+2) = (\overline{x} - 2 \cdot s,\ \overline{x} + s)$ και από το πιο κάτω διάγραμμα παρατηρούμε ότι σε αυτό το διάστημα βρίσκεται το 13,5%+68%=81,5% των παρατηρήσεων.

$\frac{81,5}{100} \cdot 2.000 = 81,5 \cdot 20 = 1.630$



$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} > \frac{1}{10}$ άρα δεν είναι ομοιογενές.

Αν x_i είναι οι αρχικές παρατηρήσεις τότε με την πρόσθεση της παραμέτρου α>0 γίνονται $y_i = x_i + \alpha$ και γνωρίζουμε *(εφαρμογή 3 σχολικού σ.99)* ότι: $\overline{y} = \overline{x} + \alpha$ και $s_y = s_x$

$$CV_y = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{2}{14+\alpha}$$

$$CV_y \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{14+\alpha} \le \frac{1}{10} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 20 \le 14+\alpha \Leftrightarrow 6 \le \alpha$$

Αρα η ζητούμενη μικρότερη τιμή του α είναι α=6.