2007 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $x_1, x_2, ..., x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις:

7, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3,

όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με α<β<γ. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$, δ = 6 και R = 8 αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε να ισχύει

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$. **Μονάδες 8**

β. Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $s_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

γ. Έστω $y_1, y_2, \ldots, y_{11}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2. Αν $\bar{y} = 9$ και $s_y = 2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2. **Μονάδες 9**

Λύση:

α. $\bar{x} = 6 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{11} t_i}{11} = 6 \Leftrightarrow \frac{7+5+a+2+5+b+8+6+g+5+3}{11} = 6 \Leftrightarrow \frac{41+\alpha+\beta+\gamma}{11} = 6 \Leftrightarrow$

$41+\alpha+\beta+\gamma = 66 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = 66-41 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = 25$

Διατάσσω τις παρατηρήσεις (εκτός των α, β, γ που δεν γνωρίζω) κατ' αύξουσα σειρά:

2, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 8

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 11, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση όταν αυτοί διαταχθούν κατ' αύξουσα σειρά.Αφού μας δίνεται ότι δ=6 και πρίν το 6 υπάρχουν 5 παρατηρήσεις, οι άλλες 5 θα είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 6.

Αφού 8-2=6 και γνωρίζω ότι το εύρος R=8 δεν μπορεί το 8 να να είναι η μεγαλύτερη παρατήρηση και δεδομένου ότι α<β<γ συμπεραίνω ότι η μεγαλύτερη παρατήρηση είναι το γ.Τότε:

$\gamma - 2 = 8 \Leftrightarrow \gamma = 2+8 = 10$

Αφού γ=10 από $\alpha+\beta+\gamma = 25$ συμπεραίνω ότι $\alpha+\beta+10 = 25 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 25-10 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 15$.

Αφού α, β φυσικοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 6 και μικρότεροι του 10, με α<β έχουμε τις εξής επιλογές για να είναι $\alpha+\beta=15$:

α=6, β=9

α=7, β=8

Επομένως έχουμε 2 τριάδες πιθανων λύσεων (α,β,γ) = (6,9,10) και (α,β,γ) = (7,8,10)

Εξετάζω ποιά από αυτές ικανοποιεί την $\alpha^2+\ \beta^2+\ \gamma^2=\ 217$

Η πρώτη τριάδα δίνει : $\alpha^2+\ \beta^2+\ \gamma^2=6^2+9^2+10^2=36+81+100=217$

ενώ η δεύτερη $\alpha^2+\ \beta^2+\ \gamma^2=7^2+8^2+10^2=49+64+100=213$

Αρα οι ζητούμενες τιμές των α, β, γ είναι:

α=6, β=9 και γ=10

Πλέον όλες οι παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά είναι: 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10

β. $s_x^2=\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}(x_i-\overline{x})^2\nu_i=\frac{(2-6)^2+(3-6)^2+3\cdot(5-6)^2+2\cdot(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2+(9-6)^2+(10-6)^2}{11}$

$$\frac{(-4)^2+(-3)^2+3\cdot(-1)^2+2\cdot0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{11}=\frac{16+9+3+1+4+9+16}{11}=\frac{28+10+20}{11}=\frac{58}{11}$$

Αρα: $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{\frac{58}{11}}$

γ. Οπως γνωρίζουμε από εφαρμογή 3 σ.99 του σχολικού:

3. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ παρατηρήσεις με μέση τιμή και τυπική απόκλιση s_x.
α) Αν $y_1, y_2,..., y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν <u>προσθέσουμε</u> σε καθεμιά από τις $x_1, x_2,..., x_\nu$ μια σταθερά c, να δειχτεί ότι:
i) $\overline{y}=\overline{x}+c$ ii) $s_y=s_x$
β) Αν $y_1, y_2,..., y_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε σε καθεμιά από τις $x_1, x_2,..., x_\nu$ μια σταθερά c, να αποδειχτεί ότι:
i) $\overline{y}=c\overline{x}$ ii) $s_y=|c|s_x$

Αρα: $\overline{y}=c_1\overline{x}+c_2$ και $s_y=|c_1|s_x\overset{c_1>0}{=}c_1s_x$

Δίνεται $s_y=2s_x$ οπότε συμπεραίνω $c_1=2$ και αντικαθιστώντας τα γνωστά στην $\overline{y}=c_1\overline{x}+c_2$ παίρνω:

$9=2\cdot6+c_2\Leftrightarrow c_2=9-12=-3$