Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x). **Μονάδες 5**

β. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **Μονάδες 8**

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της. **Μονάδες 12**

Λύση:

α. Πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός.

$\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=1$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$.

Αρα $x^2-x+1>0$ για κάθε πραγματικό, οπότε πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

β. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{-1}{(-1)^2-(-1)+1}=\dfrac{-1}{1+1+1}=\dfrac{-1}{3}=-\dfrac{1}{3}$.

γ. $$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2-x+1}\right)'=\frac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=\frac{1(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=$$

$$\frac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}>0\Leftrightarrow -x^2+1>0\Leftrightarrow -1<x<1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	1	↘	0

- Αρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ -1]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,\ 1]$.
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

- Παρουσιάζει ελάχιστο στο -1, το $f(-1)=\frac{-1}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{-1}{1+1+1}=-\frac{1}{3}$.
- Παρουσιάζει μέγιστο στο 1, το $f(1)=\frac{1}{1^2-1+1}=1$.

Σημείωση: Δεν ζητείται βέβαια αλλά παραθέτω και την γραφική παράσταση σχεδιασμένη με το Geogebra.

Παρατηρούμε ότι ο άξονας των x (με εξίσωση y=0) είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης