2007 ΘΕΜΑ 3ο ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$A = \{x \in \Omega / \ 0 \le \ell n(x-1) < \ell n 3\}$,

$B = \{x \in \Omega / \ (x^2-5x)\cdot(x-1) = -6\cdot(x-1)\}$.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(B \cup A')$. **Μονάδες 8**

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$. **Μονάδες 7**

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου Χ είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$. **Μονάδες 10**

Λύση:

α. Κατ' αρχάς πρέπει $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \ln(x-1) \\ \ln(x-1) < \ln 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \ln 1 \le \ln(x-1) \\ \ln(x-1) < \ln 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1 \le x-1 \\ x-1 < 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \le x \\ x < 4 \end{array}\right\} \overset{x\in\Omega}{\Leftrightarrow} x \in \{2,3\}$$

Αρα $\boxed{A = \{2,3\}}$

$$(x^2-5x)\cdot(x-1) = -6\cdot(x-1) \Leftrightarrow (x^2-5x)\cdot(x-1) + 6\cdot(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x-1 \text{ ή } x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x-1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3$$

Αρα $\boxed{B = \{1,\ 2,\ 3\}}$

$A - B = \varnothing$ επομένως $P(A-B) = 0$

$A' = \{1,\ 4,\ 5\}$

$B \cup A' = \Omega$ επομένως $P(B \cup A') = P(\Omega) = 1$.

β. $B' = \{4,\ 5\}$

$$P(A' \cup B') = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Αρα δείξαμε ότι $\boxed{P(A' \cup B') = \frac{3}{4}}$

γ. Δεδομένου ότι $A = \{2,3\}$ και $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ για να είναι $A \cup X = B$ το Χ μπορεί να είναι:

$X = \{1\}$ ή $X = \{1,\ 2\}$ ή $X = \{1,\ 3\}$ ή $X = \{1,\ 2,\ 3\}$.

Επειδή προφανώς $\{1\} \subseteq \{1,\ 2\}$ και $\{1\} \subseteq \{1,\ 3\}$ $\{1\} \subseteq \{1,\ 2,\ 3\}$ θα είναι και $P(\{1\}) \le P(\{1,\ 2\})$, $P(\{1\}) \le P(\{1,\ 3\})$ και $P(\{1\}) \le P(\{1,\ 2,\ 3\})$

Επίσης επειδή $\{1,\ 2\} \subseteq \{1,\ 2,\ 3\}$ θα είναι $P(\{1,\ 2\}) \le P(\{1,\ 2,\ 3\})$ και επειδή $\{1,\ 3\} \subseteq \{1,\ 2,\ 3\}$ θα είναι $P(\{1,\ 3\}) \le P(\{1,\ 2,\ 3\})$.

Αρα επειδή μας ζητείται η μικρότερη και η μεγαλύτερη πιθανότητα του X, τελικά μας ενδιαφέρει να βρούμε τα $P(\{1\})$ και $P(\{1,\ 2,\ 3\})$.

Επειδή $P(B-A) = \frac{1}{8}$ και $B - A = \{1\}$ στην περίπτωση που $X = \{1\}$ είναι $P(X) = \frac{1}{8}$

$$P(B-A) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(B) - P(B \cap A) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(B) - P(A) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{8} + P(A)$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$$

Αρα όταν $X = \{1,\ 2,\ 3\} = B$ είναι $P(X) = P(B) = \frac{3}{8}$.