

2007 ΘΕΜΑ 2^ο ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = xe^x + 3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f(x) + e^x - 3$ **Μονάδες 10**

β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^x}{x^2 - x}$. **Μονάδες 15**

Λύση:

$$\alpha. f'(x) = (xe^x + 3)' = (xe^x)' + (3)' = (x)'e^x + x(e^x)' + 0 = 1 \cdot e^x + xe^x = e^x + xe^x$$

Δείξαμε ότι $f'(x) = e^x + xe^x$. Ομως $f(x) = xe^x + 3 \Leftrightarrow xe^x = f(x) - 3$ και αντικαθιστώντας

$$f'(x) = e^x + f(x) - 3 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) + e^x - 3$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$