Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ για τον οποίο ισχύει

P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2P(3)=2P(4)=2P(5). Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω:

$A=\{1,\ 3,\ x^2-x-3\}$, $B=\{2,\ x+1,\ 2x^2+x-2,\ -2x+1\}$ όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του , δηλαδή οι P(–1), P(0), P(1), P(2), P(3), P(4), P(5). **Μονάδες 7**

β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει A∩B={–1,3}. **Μονάδες 8**

γ. Για x= –1 να δειχθεί ότι: $P(A)=\frac{5}{11},\quad P(B)=\frac{7}{11},\quad P(A\cap B)=\frac{3}{11}$

και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες P(A–B) και P(A∪B΄). **Μονάδες 10**

Λύση:

α. Από $2P(3)=2P(4)=2P(5)\Leftrightarrow P(3)=P(4)=P(5)$

Αν θέσουμε $P(3)=P(4)=P(5)=p$ τότε $P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=2p$ οπότε:

$$P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1\Rightarrow 2p+2p+2p+2p+p+p+p=1\Rightarrow$$

$$11p=1\Rightarrow p=\frac{1}{11}$$

Αρα $P(3)=P(4)=P(5)=\frac{1}{11}$ και

$$P(-1)=P(0)=P(1)=P(2)=\frac{2}{11}$$

β. Αφού $-1\in A\cap B$ θα είναι $-1\in A$ οπότε:

$$x^2-x-3=-1\Leftrightarrow x^2-x-3+1=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2$$

- Για $x=-1$:

$x+1=-1+1=0$

$2x^2+x-2=2(-1)^2+(-1)-2=2-1-2=-1$

$-2x+1=-2(-1)+1=2+1=3$

$B=\{2,\ 0,\ -1,\ 3\}$

- Για $x=2$:

$x+1=2+1=3$

$2x^2+x-2=2\cdot 2^2+2-2=2\cdot 4=8$

$-2x+1=-2\cdot 2+1=-4+1=-3$

$B=\{2,\ 3,\ 8,\ -3\}$

Παρατηρούμε ότι για να έχουμε $A \cap B = \{-1,3\}$ πρέπει $x=-1$.

γ. Για $x=-1$, είναι $A = \{-1,\ 1,\ 3\}$ και $B = \{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}$.Αρα από τον αξιωματικό ορισμό πιθανότητας *(σ. 149)* έχουμε:

- $P(A) = P(-1) + P(1) + P(3) = 2p + 2p + p = 5p = \dfrac{5}{11}$
- $P(B) = P(-1) + P(0) + P(2) + P(3) = 2p + 2p + 2p + p = 7p = \dfrac{7}{11}$
- $P(A \cap B) = P(-1) + P(3) = 2p + p = 3p = \dfrac{3}{11}$
- $P(A - B) = P(1) = 2p = \dfrac{2}{11}$

  $B' = \{1,\ 4,\ 5\}$

  $A \cup B' = \{-1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5\}$

- $P(A \cup B') = P(-1) + P(1) + P(3) + P(4) + P(5) = 2p + 2p + p + p + p = 7p = \dfrac{7}{11}$.

Εναλλακτικά με χρήση κανόνων λογισμού πιθανοτήτων:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) = \frac{5}{11} + 1 - \frac{7}{11} - \frac{2}{11} = \frac{11}{11} - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$$