2008 Επαναληπτικές ΘΕΜΑ Γ- Πιθανότητες

Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες P(A), P(A∪B) και P(A∩B) είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου

$$\{p-1, p, p+1, p^2, p^3\}.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A\cup B) = p$ και $P(A\cap B) = p^3$. **Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$. **Μονάδες 8**

γ. Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$. **Μονάδες 8**

Λύση:

α. Αφού $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ θα είναι $P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$ (1)

$p<1\Leftrightarrow p-1<0$

$0<p\Leftrightarrow 0+1<p+1\Leftrightarrow 1<p+1$

Αρα δεδομένου ότι $0\leq P(A)\leq 1$ $0\leq P(A\cup B)\leq 1$ και $0\leq P(A\cap B)\leq 1$ αποκλείεται κάποιο από τα P(A), P(A∪B) και P(A∩B) να παίρνουν τις τιμές p-1 ή p+1

$p<1\overset{p>0}{\Leftrightarrow} p^2<p$

$p<1\overset{p^2>0}{\Leftrightarrow} p^3<p^2$

Αρα $p^3<p^2<p$ οπότε σε συνδιασμό με την (1) συμπεραίνουμε ότι:

$P(A\cap B) = p^3$ $P(A) = p^2$ και $P(A\cup B) = p$.

β. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(B)=P(A\cap B)-P(A)+P(A\cup B)\Rightarrow$

$P(B)=p^3-p^2+p$

γ. $P(B-A)>P(A-B)\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)>P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(B)>P(A)\Leftrightarrow$

$p^3-p^2+p>p^2\Leftrightarrow p^3-2p^2+p>0\overset{p>0}{\Leftrightarrow} p^2-2p+1>0\Leftrightarrow (p-1)^2>0$

Η τελευταία σχέση ισχύει αφού $p\neq 1$ άρα θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.