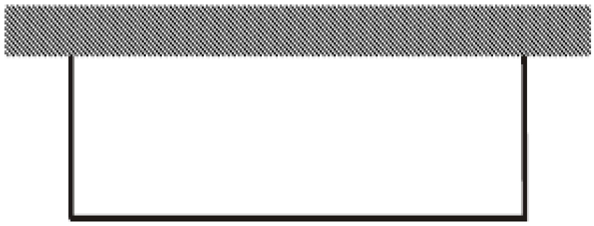
Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.



Σχήμα 1

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$f(x)=100x-\frac{1}{2}x^2$ **Μονάδες 6**

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m. **Μονάδες 7**

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών f′(100), f′(101), f′(102), f′(103) και f′(104). **Μονάδες 5**

δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών f′(100), f′(101), f′(102), f′(103) και f′(104) και CV′ ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c, όπου c ≠ 2. Να υπολογίσετε το c, έτσι ώστε να ισχύει CV′ = 2CV. **Μονάδες 7**

Λύση:

Αν y m η άλλη πλευρά της ορθογώνιας περιοχής έχουμε:

$$2y+x=200 \Leftrightarrow y=\frac{200-x}{2}.$$

Προφανώς είναι x>0 και y>0.Από την τελευταία έχουμε:

$$y>0 \Leftrightarrow \frac{200-x}{2}>0 \Leftrightarrow 200-x>0 \Leftrightarrow 200>x \Leftrightarrow x<200$$

Αρα τελικά $0<x<200$

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι :

E=xy.Αντικαθιστούμε το y που βρήκαμε προηγουμένως και έχουμε:

$$E=x\frac{200-x}{2}=x\left(\frac{200}{2}-\frac{x}{2}\right)=x\left(100-\frac{x}{2}\right)=100x-\frac{x^2}{2}$$

Εκφράσαμε λοιπόν το εμβαδό ως συνάρτηση του x την οποία συμβολίζουμε f. Επομένως έχουμε:

$$f(x)=100x-\frac{x^2}{2} \quad \text{με } 0<x<200$$

$$f'(x)=\left(100x-\frac{x^2}{2}\right)'=100-\frac{2x}{2}=100-x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 100-x=0 \Leftrightarrow x=100$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 100-x>0 \Leftrightarrow x<100$$

x	0		100		200
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Αρα η μεγαλύτερη επιφάνεια επιτυγχάνεται για x=100 m και είναι ίση με

$$f(x) = 100 \cdot 100 - \frac{100^2}{2} = 10.000 - 5000 = 5000\ m^2$$

$$f'(100) = 100 - 100 = 0$$

$$f'(101) = 100 - 101 = -1$$

$$f'(102) = 100 - 102 = -2$$

$$f'(103) = 100 - 103 = -3$$

$$f'(104) = 100 - 104 = -4$$

Αρα η μέση τιμή των $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$, $f'(104)$ είναι:

$$\overline{x} = \frac{0-1-2-3-4}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

Εστω:

$$y_1 = f'(100) + c$$

$$y_2 = f'(101) + c$$

$$y_3 = f'(102) + c$$

$$y_4 = f'(103) + c$$

$$y_5 = f'(104) + c$$

Γνωρίζουμε από εφαρμογή του σχολικού *(εφαρμογή 3 σ.99)* ότι :

$\overline{y} = \overline{x} + c$ και ότι $s_y = s_x$

CV' είναι συντελεστής μεταβλητότητας των y_i.Θέλουμε :

$$CV' = 2CV \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\overline{y}|} = 2\frac{s_x}{|\overline{x}|} \Leftrightarrow \frac{\cancel{s_x}}{|\overline{x}+c|} = 2\frac{\cancel{s_x}}{|\overline{x}|} \Leftrightarrow \frac{1}{|\overline{x}+c|} = 2\frac{1}{|\overline{x}|} \Leftrightarrow |\overline{x}| = 2|\overline{x}+c|$$

οπότε για $\overline{x} = -2$ είναι $|\overline{x}| = |-2| = 2$ και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$2 = 2|\overline{x}+c| \Leftrightarrow 1 = |\overline{x}+c| \Leftrightarrow 1 = |-2+c| \Leftrightarrow 1 = |-2+c| \Leftrightarrow -2+c = 1 \text{ ή } -2+c = -1 \Leftrightarrow c = 1+2 \text{ ή } c = -1+2$$

$$\Leftrightarrow c = 3 \text{ ή } c = 1.$$