

2008 ΘΕΜΑ Δ- Ανάλυση- Πιθανότητες

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α , ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β .

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β ; **Μονάδες 7**

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β ».

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$

Μονάδες 9

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν έχει ακρότατα. **Μονάδες 9**

Λύση:

α. Αν A το ενδεχόμενο να διαβάζει κάποιος την εφημερίδα A και B το ενδεχόμενο να διαβάζει την εφημερίδα B τότε

$$P(A) = 0,5$$

$$P(A - B) = 0,3$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) =$$

$$1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(B \cap A) = 1 - (P(A) - P(B \cap A)) = 1 - P(A - B) = 0,7.$$

$$\mathbf{\beta.} \quad B \subseteq A' \cup B \quad \text{άρα} \quad P(B) \leq P(A' \cup B) = 0,7 = \frac{7}{10} \quad \mathbf{(1)}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$0,3 = 0,5 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$$

Είναι $A \cap B \subseteq B$ οπότε $P(A \cap B) \leq P(B)$.

$$0,2 \leq P(B) \Leftrightarrow \frac{2}{10} \leq P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq P(B) \quad \mathbf{(2)}$$

Συνδιάζοντας τις **(1)** και **(2)** προκύπτει η ζητούμενη:

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

$$\gamma. f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x$$

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B)x \right)' = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x + P(B) = 3x^2 - x + P(B)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x + P(B) = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot P(B) = 1 - 12 \cdot P(B)$$

Ομως έχουμε :

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \Leftrightarrow \frac{12}{5} \leq 12P(B) \Leftrightarrow -\frac{12}{5} \geq -12P(B) \Leftrightarrow 1 - \frac{12}{5} \geq 1 - 12P(B) \Leftrightarrow \frac{5}{5} - \frac{12}{5} \geq 1 - 12P(B) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{7}{5} \geq 1 - 12P(B) \Leftrightarrow 1 - 12P(B) \leq -\frac{7}{5}$$

Αρα $\Delta < 0$ οπότε η $f'(x)$ ομόσημη του $a=3 > 0$ δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και συνεπώς δεν παρουσιάζει ακρότατα.