2008 ΘΕΜΑ 2ο ΑΝΑΛΥΣΗ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}$ **Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x)=2-x$. **Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f(x). **Μονάδες 9**

Λύση:

$$f(x)=\frac{x-1}{e^x}$$

α. Είναι : $\frac{e^x f(x)}{x^2-1}=\frac{\cancel{e^x}\frac{x-1}{\cancel{e^x}}}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

β. $f'(x)=\left(\frac{x-1}{e^x}\right)'=\frac{(x-1)'e^x-(x-1)(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x-xe^x+e^x}{(e^x)^2}=\frac{2e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(2-x)}{(e^x)^2}=\frac{2-x}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{2-x}{e^x}\Leftrightarrow f'(x)e^x=2-x$$

γ. $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2-x}{e^x}=0\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=0.$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2-x}{e^x}>0\Leftrightarrow 2-x>0\Leftrightarrow x<2.$$

Πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$f(2)=\frac{1}{e^2}$	$\searrow$ 0

Η $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 2, το $f(2)=\frac{2-1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$

Σημείωση: Παραθέτουμε την γραφική παράσταση της f αν και δεν ζητείται.