## 2009 Επαναληπτικές ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\nu^3x+\dfrac{4}{x^2}$, x∈(0,1), όπου ν ακέραιος αριθμός με ν >2

**Α. α.** Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 8**

**β.** Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και να δειχθεί ότι f(x) ≥ 3$\nu^2$ για κάθε x∈(0,1)

**Μονάδες 5**

**Β.** Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο Ω = {1, 2, ..., ν} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, Α για το οποίο ισχύει

$$\nu^3P(A)+\frac{4}{(P(A))^2}=3\nu^2 \quad \text{και} \quad N(A)=\nu^2-9\nu-8$$

όπου P(A) είναι η πιθανότητα του Α και N(A) το πλήθος των στοιχείων του Α

**α.** Να δείξετε ότι $P(A)\ =\ \dfrac{1}{5}$ **Μονάδες 7**

**β.** Αν επιπλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με P(A∩B) = $\dfrac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α΄∪Β **Μονάδες 5**

## Λύση:

**Αα.** $f'(x)=\left(\nu^3x+\dfrac{4}{x^2}\right)'=\left(\nu^3x+4x^{-2}\right)'=\left(\nu^3x\right)'+\left(4x^{-2}\right)'=\nu^3(x)'+4\left(x^{-2}\right)'=\nu^3 1+4(-2)x^{-3}=\nu^3-\dfrac{8}{x^3}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \nu^3-\frac{8}{x^3}=0\Leftrightarrow \nu^3=\frac{8}{x^3}\Leftrightarrow x^3=\frac{8}{\nu^3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{\nu^3}}\Leftrightarrow x=\frac{2}{\nu}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow \nu^3-\frac{8}{x^3}>0\Leftrightarrow \nu^3>\frac{8}{x^3}\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^3>\frac{8}{\nu^3}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\sqrt[3]{x^3}>\sqrt[3]{\frac{8}{\nu^3}}\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>\frac{2}{\nu}$$

| x | 0 | | $\frac{2}{\nu}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=\nu^3-\frac{8}{x^3}$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)=\nu^3x+\frac{4}{x^2}$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Παρατηρούμε ότι η f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\ \frac{2}{\nu}\right]$
- Γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{\nu},\ 1\right)$

**β.** Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=$\frac{2}{\nu}$ το οποίο είναι ίσο με:

$$f\left(\frac{2}{\nu}\right)=\nu^3\frac{2}{\nu}+\frac{4}{\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}=2\nu^2+\frac{4}{\frac{4}{\nu^2}}=2\nu^2+\nu^2=3\nu^2$$

Αρα για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει: $f(x)\geq 3\nu^2$.

$$\nu^3 P(A)+\frac{4}{\left(P(A)\right)^2}=3\nu^2$$

**Βα.** Γενικά όπως γνωρίζουμε ισχύει $0\leq P(A)\leq 1$

Ομως η εξίσωση $N(A)=0\Leftrightarrow \nu^2-9\nu-8=0$ δεν έχει λύσεις ακέραιες, επομένως $P(A)\neq 0$

Επίσης η εξίσωση $N(A)=N(\Omega)\Leftrightarrow N(A)=\nu\Leftrightarrow \nu^2-9\nu-8=\nu\Leftrightarrow \nu^2-10\nu-8=0$ δεν έχει λύσεις ακέραιες επομένως $P(A)\neq 1$.

Αφού $0<P(A)<1$ θα είναι $f(P(A))=\nu^3P(A)+\frac{4}{\left(P(A)\right)^2}\geq 3\nu^2$ και η ισότητα θα ισχύει μόνο αν

$$P(A)=\frac{2}{\nu}$$

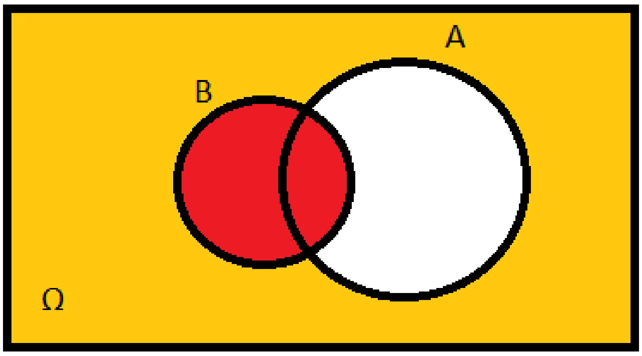
Επιπλέον από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας έχουμε:

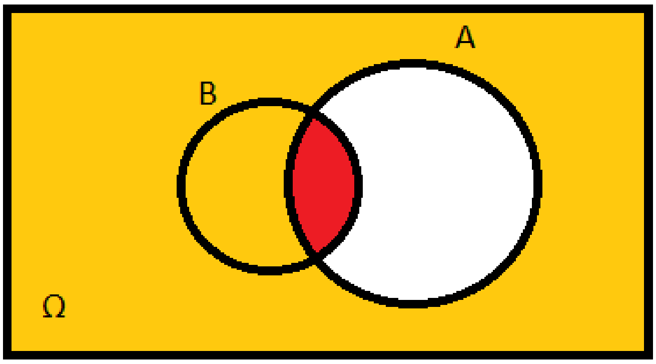
$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow \frac{2}{\nu}=\frac{\nu^2-9\nu-8}{\nu}\Leftrightarrow \nu^2-9\nu-8=2\Leftrightarrow \nu^2-9\nu-10=0\Leftrightarrow \nu=-1$ ή ν=10 .Επειδή ν>2 η μόνη λύση είναι ν=10 οπότε πλέον:

$$P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

**β.** Οπως μπορεί κάποιος να διαπιστώσει από το παρακάτω διάγραμμα του Venn ισχύει:

$A' \cup B = A' \cup (A \cap B)$




και τα ενδεχόμενα $A'$ και $A \cap B$ είναι ξένα μεταξύ τους οπότε ισχύει για αυτά ο απλός προσθετικός νόμος.Αρα:

$$P(A' \cup B) = P(A' \cup (A \cap B)) = P(A') + P(A \cap B) = 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30}{30} - \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{29}{30}$$

***β' τρόπος***

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B - A) = 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B))$$

$$1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30}{30} - \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{29}{30}.$$